PROFUNDIZACIÓN EN ALGUNOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Deepening in some mathematical objects

JOHN EDISON CASTAÑO GIRALDO*

Recibido: 28 de abril de 2015. Aceptado: 28 de mayo de 2015

Resumen

Inicialmente se considera los números naturales como los números que tienen como función principal contar. Entonces cada número natural representa la cantidad de elementos que tiene un conjunto. La asignación es la primera estrategia utilizada para que cada símbolo represente la cantidad de elementos de un conjunto, por ejemplo (el símbolo 1 representa un elemento que tiene un solo elemento, 2 es el símbolo para un conjunto con dos elementos y así sucesivamente). Por lo anterior surge la pregunta ¿Por qué estos símbolos? La segunda estrategia utilizada es la de la agrupación, a medida que el número de elementos aumenta se va haciendo grupos para resumir la escritura. En nuestro conocimiento sobre los números naturales, se hace grupos de a diez elementos pero ¿por qué tomamos diez como el número de elementos para agrupar? La tercera estrategia consiste en diferenciar una cantidad de la otra por medio de la posición, es decir, un número uno (1) puede significar diferentes cantidades de agrupación dependiendo de la posición donde esté ubicado.

Palabras clave: conjunto, elementos, números naturales, símbolos.

Abstract

Initially it considered the natural numbers as the numbers whose main function count. Then every natural number representing the number of elements that have a set. The assignment is the first strategy used for each symbol represents the number of elements in a set, for example (the symbol 1 represents an element that has only one element, 2 is the symbol for a set with two elements and so on). Therefore the question arises why these symbols? The second strategy used is that of the group, as the number of elements increases is becoming groups to resume writing. In our knowledge of the natural numbers, we do groups of ten items but why take ten years as the number of elements to group? The third strategy is to distinguish a number of other by means of the position, ie, a number one (1) may mean grouping different amounts depending on the position where it is located.n this document are given to learn the basics, history, classes, and most relevant information about artificial intelligence. In sum, the artificial intelligence is defined as the science that has one major approach in the development of programs or machines, which are capable of reasoning alone for the solution of problem, and added to this have the ability to be more efficient than a human.

Key words: sets, elements, natural numbers, symbols.

I. Introducción

Para tratar de entender un poco mejor los números naturales, se utiliza la estrategia de representarlos por medio de símbolos diferentes a los usuales (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0) y así poder responder a la pregunta ¿Por qué utilizar estos símbolos? Las representaciones utilizadas serán de tipo aditivo y multiplicativo, lo que permite analizar las operaciones entre números naturales a profundidad, con resultados interesantes como: la noción que se tiene división puede confundirse entre dos ideas, al operar números naturales debe tenerse en cuenta la potencia de la base que acompaña a cada cantidad.

* Docente investigador, Corporación Universitaria Republicana. Correo electrónico: jecastanogi@gmail.com

Al final se podra decidir si las operaciones siguen teniendo los mismos procedimientos o varían por las representaciones.

Por otro lado se podra decir que la noción de línea recta que se tiene, lleva a una representación gráfica que parece un trazo firme y en la misma dirección.

Figura 1. Línea Recta,

Pero esta noción no es tan general, debido a que está limitada a un sistema de representación cartesiano, pero ¿Qué pasa cuando el sistema de representación es diferente al cartesiano? ¿Siempre varía la representación de una línea recta con solo cambiar el sistema de referencia? se verá algunos ejemplos para ilustrar estas ideas.

En nuestro conocimiento de línea recta se sabe que los elementos principales que la conforman son: Dos puntos por los que pasa, la pendiente, el intercepto con uno de los ejes. Pero se profundizará en las definiciones de pendiente para reflexionar sobre su existencia o su escritura algebraica, pues alguna de sus ecuaciones puede no ser tan general.

En este documento se encontrará una breve descripción de los números naturales utilizando una representación simbólica diferente a la usual y sus características (Agrupación y posicionalidad). También se presentan las operaciones usuales entre números naturales haciendo una comparación con los símbolos tradicionales, para analizar si varían o no. En segundo lugar se hace una descripción de la línea recta en algunos sistemas de referencia, como el cartesiano, algunos de tipo oblicuo, y el sistema PAR[1]. Lo anterior con el fin de comparar las representaciones y las características algebraicas y poder generalizar algunas de ellas.

II. Números naturales

En adelante se utilizará la siguiente representación simbólica de los números naturales, para tratar de hacer una presentación general de sus características y propiedades.

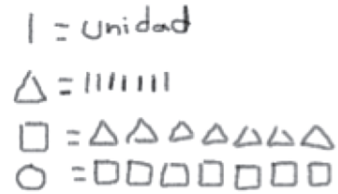

Figura 2. Sistema Aditivo.

En la representación por medio de un sistema aditivo es posible ver claramente la idea de asignación y agrupación; siempre que se define la unidad y con base a esta unidad se construyen los siguientes símbolos.

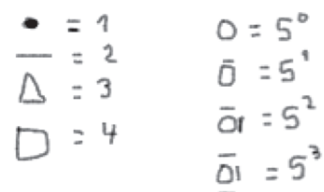

Figura 3. Sistema Multiplicativo[2].

La unidad representa la asignación de algún elemento que se está contando (esta operación consiste en asignar). Además cada vez que se utiliza un símbolo para representar una cantidad de símbolos anteriores, se está utilizando la agrupación.

Las operaciones entre números naturales utilizando esta simbología no varían. Lo único que se debe tener en cuenta es la agrupación que se ha hecho para obtener cada una de las cantidades, por ejemplo:

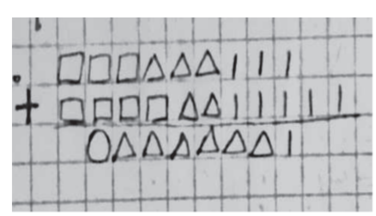

Figura 4. Suma.

1 Sistema PAR: Se construye con dos líneas paralelas como ejes coordenados y se gradúan para definir los puntos.

2 Se utiliza la base cinco como un ejemplo ilustrativo.

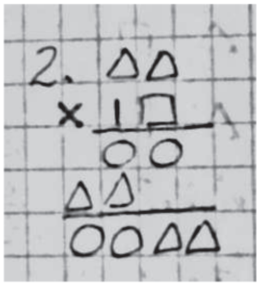

Figura 5. Multiplicación

En la figura 2 no hubiese sido posible obtener un triángulo adicional si no se entendiera que la agrupación es de siete unidades. Mientras que en la figura 3 intervienen dos nociones: la primera que consiste en comprender la multiplicación, entonces para la primera cantidad cuadrado por triángulo debe entenderse como la suma de triángulo veces cuadrado. La segunda noción corresponde a la noción de agrupación, pues de lo anterior para calcular triángulo veces cuadrado debe conocerse la cantidad de unidades que representa la expresión «triángulo veces cuadrado».

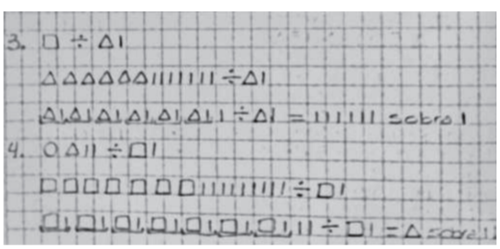

Figura 6. División.

Para el caso de la división, la estrategia es la misma en comparación con la división utilizando los símbolos usuales para los números naturales. La idea es repartir en partes iguales, entonces para la primera división debe dividirse en el cuadrado en «triángulo palo» veces, como lo muestra la figura 6.

Por lo anterior es importante utilizar como estrategia la desagrupación, pues es necesaria para escribir el dividendo en términos del divisor. Como conclusión importante puede decirse que después de profundizar en la división entre números naturales, la noción de repartir en partes iguales es insuficiente pues existe la posibilidad de hacer grupos de la cantidad que represente el divisor (repartir en partes iguales) o también de hacer tantos grupos como la cantidad del divisor lo indique. Las definiciones anteriores son válidas para la operación de división.

Para el caso del sistema multiplicativo se puede tener como conclusión importante, que nuevamente la agrupación es indispensable. Lo anterior porque se puede decir que de cada número natural identifica una parte que corresponde a la cantidad y la que la acompaña que corresponde a la potencia de la base (Ésta define la posición y se obtiene de agrupar la base un número determinado de veces). Por ejemplo:

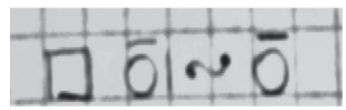

Figura 7. Número en sistema multiplicativo.

La cantidad que aparece en la figura 7 representada tiene dos unidades en la primera potencia de la base y cuatro unidades en la segunda potencia de la base.

Las operaciones se pueden resolver utilizando los mismos algoritmos utilizados propuestos para la simbología usual, pero teniendo especial cuidado con las operaciones entre las potencias de la base, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

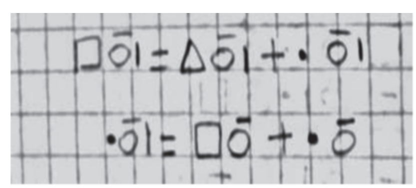

Figura 8. Sumas en sistema multiplicativo,

En la figura 8, en la primera suma se observa que sumar cantidades de la misma potencia de la base sin que sobrepase a la base, produce como resultado una cantidad de la misma potencia de la base.

En el caso de la segunda suma como la potencia de la base sobrepasa a la base, que en este caso es cinco, se obtiene como resultado una cantidad de la siguiente potencia de la base.

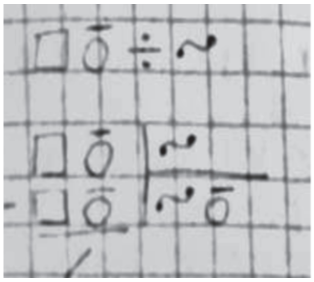

Figura 9. División en sistema multiplicativo,

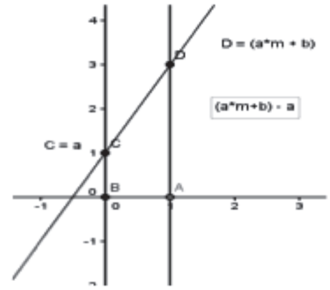

Figura 10. Línea Recta.

En el caso de la división debe utilizarse la misma idea de encontrar un número que al multiplicarlo se obtenga el dividendo o una cantidad cercana a él. Acá nuevamente es importante tener en cuenta que la multiplicación debe permitir obtener la misma potencia de la base.

III. Línea recta

La noción que se tiene de línea recta consiste en características como las siguientes: Es una sucesión infinita de puntos (en la misma dirección si es recta), es un objeto en una dimensión, gráficamente es el trazo obtenido al «deslizar» el lápiz por el papel o la unión de puntos dibujados en un plano, algebraicamente se relaciona con una pendiente y ésta define el sentido de la línea si es paralela al eje x o tiene cierto ángulo de inclinación respecto del eje. Profundizando un poco en esta nociones que se tiene se debe decir que no son tan generales en cambio son casos particulares de un sistema de referencia.

Se puede decir lo anterior debido al estudio que se ha hecho sobre la línea recta en distintos sistemas de referencia que ha permitido observar características más generales. Los sistemas de referencia pueden construirse sobre líneas paralelas (Sistema PAR), sobre líneas que se intersecan formando un ángulo perpendicular entre ellas (SISTEMA CARTESIANO), o simplemente sobre líneas que se intersecan (SISTEMA OBLICUO).

El significado que tiene la línea recta en un sistema que se construye sobre líneas paralelas es muy diferente al significado de línea recta en el sistema cartesiano, a continuación se presenta la definición.

Para representar un punto en el sistema PAR se traza una línea desde un eje hacia el otro.

Por lo tanto en este sistema un punto es una línea. Esta representación gráfica ya evidencia una notable diferencia con nuestra idea grafica de punto. A partir de esta nueva representación también la definición de línea recta debe variar, ya que en el sistema cartesiano está definida en términos de puntos, los cuales han pasado a ser otro objeto ahora.

De la ecuación de línea recta en el plano cartesiano $y = mx + b$ se deduce a partir de la nueva definición de punto lo siguiente:

$$a = X_{par}\ (a * m + b) = Y_{par}$$

Que representan puntos del sistema par, así el punto solución del sistema PAR, es:

$(X_{par}, Y_{par}) \rightarrow Y = (am + b - a)X + a$ Sistema Cartesiano.

Por lo tanto se puede decir que la línea recta en el sistema PAR representa un punto en el sistema cartesiano que cumple con los siguientes parámetros [1].

Recta sistema PAR= (X,Y) Sistema cartesiano.

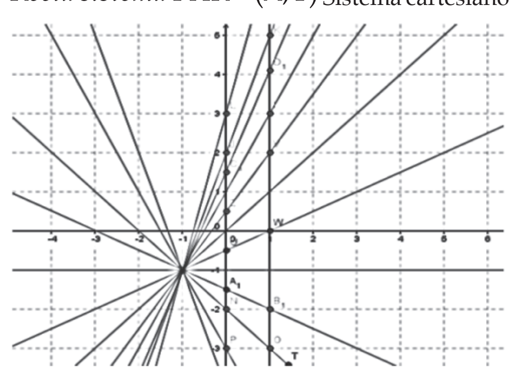

Figura 11. Representación gráfica Línea Recta.

De esta manera se tiene una nueva representación gráfica de línea recta, lo que de inmediato debe generar preguntas como las siguientes: ¿Cómo se verán las líneas rectas paralelas? ¿Las perpendiculares? ¿Qué significa la pendiente de una línea recta? Algunas de estas características se pueden ver a través de las siguientes representaciones.

La idea de pendiente de una línea recta debe reformularse en términos de la nueva definición de línea recta.

Pendiente como razón	Pendiente como cociente de distancias	Pendiente como la tangente del ángulo.
$m=-\frac{b}{a}$	$m=\frac{Y_1-Y_0}{X_1-X_0}=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$	$m=\tan\alpha$

Figura 12. Definiciones de Pendiente.

Debido a que los ejes coordenados son paralelos y la línea recta es un punto no es posible hablar del ángulo que se forma entre la línea y los ejes (Pues un ángulo se mide entre dos rayos, definidos en el plano cartesiano). Por lo tanto la definición de pendiente en términos de la tangente del ángulo no es posible.

De manera similar la noción de distancia se plantea entre dos puntos, los que en el sistema PAR corresponden a líneas rectas del sistema cartesiano. Por lo anterior no es posible hablar de la distancia entre dos líneas rectas y la definición de pendiente como cociente de distancias tampoco es posible. Así que la forma de escribir la pendiente de una línea recta en el sistema PAR es como una razón, y esto se puede hacer debido a que se conoce los valores de a y b.

Esta comparación entre el sistema cartesiano y el sistema PAR permite reflexionar en torno a la generalidad de las ecuaciones que permiten encontrar la pendiente de una línea recta. Es importante primero definir cuál es la representación de línea recta que se va a utilizar. De allí que si en el sistema cartesiano se define líneas rectas paralelas utilizando la pendiente como variable se debe reescribir en términos de la nueva definición de pendiente.

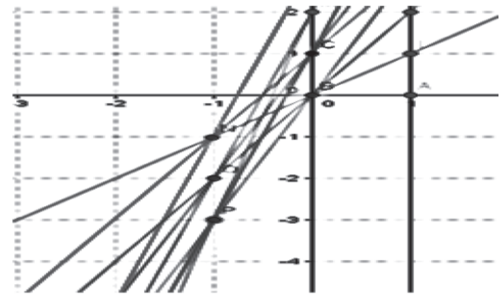

Figura 13. Líneas paralelas sistema PAR.

Como se ve en la figura 13 al dibujar líneas rectas en el sistema par con la característica de ser paralelas (En términos de tener la misma pendiente) se obtienen puntos que son colineales (en términos del sistema cartesiano).

La misma idea se utiliza para representar líneas perpendiculares en el sistema PAR, aún cuando no se tiene definida la idea de ángulo, se puede utilizar la definición que dos líneas rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1. Lo que se obtiene gráficamente es:

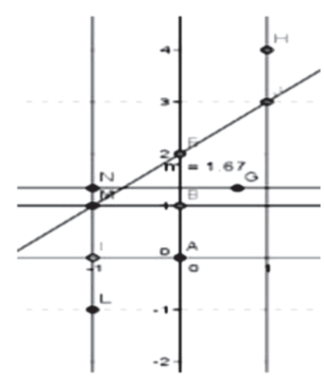

Figura 14. Rectas perpendiculares.

Referencias

[1] L. Ortiz, «Representación gráfica y algebraica de la ecuación cuadrática en el sistema Par.,» Tesis de Grado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia., 2002.