SOBRE EL INFINITO Y SUS DIFICULTADES ANTES DE GEORG CANTOR Y SUS OBRAS

ISAÍAS DAVID MARÍN GAVIRIA*

Recibido: mayo 2 de 2014 / Aceptado: junio 19 de 2014

¿Existe al menos un conjunto infinito más grande que otro conjunto infinito?

Resumen

En este ensayo se trata inicialmente el infinito desde el punto de vista filosófico desde la antigua Grecia, hasta finalizar con una pequeña presentación del enfoque Matemático que hace G. Cantor por medio de sus obras acerca del infinito.

Palabras clave: Ápeiron, infinito, infinito potencial, infinito actual, números transfinitos, números ordinales.

Summary

This essay is initially infinity from a philosophical point of view from ancient Greece to end with a short presentation of Mathematical approach that G. Cantor through his works about the infinite.

Key words: Apeiron, infinite, infinite potential, actual infinity, transfinite numbers, ordinal numbers.

Introducción

Cómo podemos hablar de algo que nos es difícil definir, explicar y hacer entender como lo es *el infinito*, este concepto, lo utilizamos cuando nos referimos a las cosas de las que no conocemos si tienen un fin, que no se pueden medir, que no se puede imaginar, y a las cosas que no se pueden encasillar dentro de los límites de nuestro lenguaje. Por esta razón, podemos decir que solo nos aferramos a la idea general de que el infinito es un algo que no tiene fin, que tiene continuidad, que permanece, y es aquí en donde demostramos que jugamos con el lenguaje y nuestra mente, ya que aun sin comprender el

* Matemático. Docente Investigador, Corporación Universitaria Republicana.

significado de las palabras que utilizamos, nos atrevemos a hacer aseveraciones sin sentido, basándonos solamente en los contrarios, *luz-oscuridad, bien-mal, infinito-finito*.

Por otro lado, sabemos que desde las matemáticas, a través de los números, los conjuntos, podemos aclarar un poco más la idea de lo *infinito*. Como veremos en este apartado a través de las ideas de Arquímedes, Xenón y Cantor con su trabajo que sin querer fue el que debeló este enigma, que desde antes de la antigua Grecia se venía trabajando.

El infinito en la antigüedad: una perspectiva filosófica

El tema del infinito al comprenderlo como una idea de algo que es ilimitado, sabemos que desconcertó a los antiguos pensadores griegos, los cuales hicieron grandes esfuerzos en tratar de comprender el significado y el sentido del infinito al someterlo a la intuición del sentido común. Lo que lamentablemente, teniendo como referente un mundo sensible, el cual podemos palpar, o mejor dicho, percibir a través de los sentidos, fue o sigue siendo el causante principal de llegar a las conclusiones contradictorias, como lo que acontece en la tan célebre carrera en donde el famoso Aquiles nunca puede llegar a alcanzar a la tortuga.

¿Qué es el infinito? Esta pregunta ha estado rondando por la historia de la humanidad desde tiempos antiguos, la cual se ha tratado de aclarar y responder desde diferentes puntos de vista. Desde la filosofía lo han hecho grandes pensadores como Demócrito, Parménides, Zenón, Anaximandro, Platón, Aristóteles, entre otros. Desde la teología están San Agustín de Hipona, Santo Tomás de Aquino. Desde las matemáticas lo han hecho autores como: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, Weierstrass, Dedekin, David Hilbert, Kronecker, entre otros. Pero, ¿es tal su importancia?, o ¿tal es la necesidad del ser humano por adquirir el conocimiento?

El pensar en el infinito es cuestionarme, ¿siendo yo un ser finito, puedo contemplar la idea de algo realmente infinito? O solamente, a través de mi ser limitado cuando soy consciente de que habito en un mundo terrenal, un mundo sensible, un mundo finito, me doy cuenta a través de una detenida observación de todos y cada uno de los objetos que se encuentran a mi alrededor, detallando cada uno de sus componentes, contemplando la posibilidad de que alguno de ellos ilumine mis ideas, para que llegue de golpe, algo diferente, distinto de verdad, que me ayude en esta búsqueda imparable por encontrar una respuesta y poder hallar ejemplos claros que me ayuden a expresar de una manera coherente cómo comprender el infinito.

Me doy cuenta, después de solo encontrar unos pocos ejemplos, aprehendidos a través de unos largos años de estudio al pasar por una escuela, un colegio y una universidad, en donde comprendo el gran significado de la famosa frase de Ludwig Wittgenstein, que dice: "los límites de mi lenguaje son los límites de mi mundo". Todo lo que percibo en este mundo, todo lo conocido, todo lo habitable, es imperfecto, limitado y finito, es decir, yo, como ser imperfecto, limitado y finito, no puedo comprender, ni mucho menos abarcar la realidad de lo que puede llegar a significar realmente "el infinito". Este no habita un espacio, no tiene principio ni fin, es incorruptible.

Ápeiron el infinito para Platon y Pitágoras

Por otro lado, al tener en cuenta la unidad del universo, sabemos que es infinita porque no nace ni muere, pero todas las cosas que devienen de él son finitas. De esta manera para Platón y Pitágoras "el infinito era *ápeiron*, el caos, el infinito carecía de medida: *metron.* La voz *ápeiron* tal como la emplea Anaximandro, significa *sin fin* o *sin límite*, suele traducirse como *lo infinito, lo indefinido, lo ilimitado.* La idea del infinito también fue rechazada por Aristóteles y los escolásticos, basados en las mismas contradicciones que el concepto de infinito generaba. Aristóteles trató de enfrentar el problema del infinito a través de dos representaciones, dos concepciones complementarias y cuya interacción dialéctica ha influido el propio desarrollo de la matemática. En el tercer libro de su obra *Física*, Aristóteles distingue dos tipos de infinito: el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito *potencial* y el segundo el infinito *actual.* La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y *así sucesivamente*, donde esta última expresión y «*así sucesivamente*» encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito. Este tipo de infinito potencial es el que sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. Por su parte, la noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría al dividir un segmento de recta en un número infinito de puntos y el infinito actual de los infinitesimales sirvió de soporte heurístico para la posterior formalización del cálculo infinitesimal". (Ortiz, 1994).

Aun así, continua mi cuestionamiento, si miramos desde un punto de vista teológico, en donde se puede considerar el infinito como una propiedad exclusiva de un ser perfecto, San Agustín creía que solamente Dios y sus pensamientos eran infinitos, solo un ser perfecto como él puede comprender el significado del infinito, por lo cual, no hay posibilidad alguna desde la

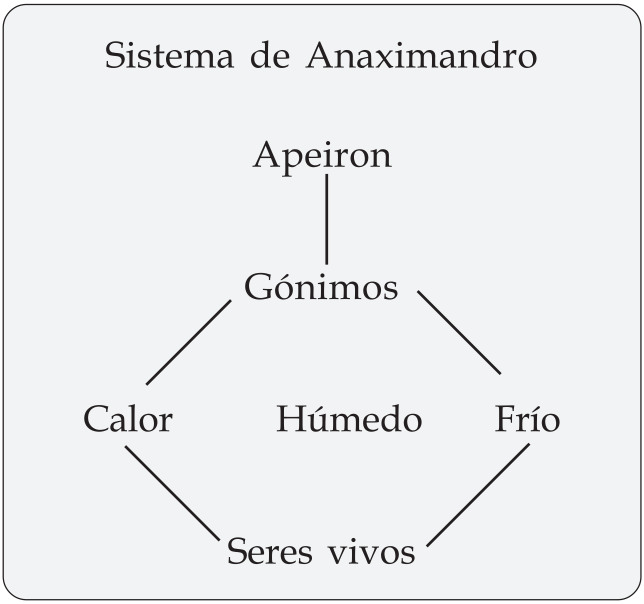

Imagen 1. Del Ápeiron de Anaximandro.
Tomada de http://www.filosofia.org/cur/pre/axima.htm

teología en que el hombre pueda adquirir el significado real de "lo infinito" y Santo Tomás de Aquino, quien decía que aunque Dios era ilimitado no podía crear cosas que fueran absolutamente ilimitadas. Así que mi incertidumbre comienza a ser más latente, al surgir unas preguntas más, ¿Por qué un ser perfecto, incorruptible como lo es Dios, no puede crear cosas iguales a él? ¿Es el infinito simplemente la representación de la esperanza del hombre por tener una continuidad permanente en el mundo?

El infinito en la antigüedad: Una perspectiva Matemática

Al mirar a través de la historia, y poder apreciar los aportes de los grandes pensadores de Grecia sobre la gran incógnita que nos produce el tema de lo infinito, me encuentro con una opción más para tratar de comprender este cuestionamiento, y es a través de las matemáticas y sus paradojas que puedo llegar a ver como el concepto del infinito se ve más claramente al dar solución a algunos ejemplos claros de paradojas que tratan con el infinito, así como un recorrido, uso o padecimiento que han tenido algunos pensadores sobre el infinito. Aunque hoy día el aprendizaje de las matemáticas puras se inicia con el estudio de los conceptos fundamentales como números y sus propiedades, conjuntos y sus propiedades, no siempre fue así, antes de Georg Cantor no todo se tenía tan estructurado y todas las nociones y propiedades actuales de conjuntos no existían. La idea de conjunto se establece como un pre-saber o idea intuitiva de colección o agrupación de ciertos elementos. Ahora el concepto de número, el cual está íntimamente ligado con los conjuntos, lo entendemos como la cantidad de elementos de una agrupación en particular. Lo que hoy día es trivial como por ejemplo: "se indica que todo conjunto tiene una cantidad dada de elementos y recíprocamente, para cualquier número natural n existe al menos un conjunto con n elementos" (Galera, 1995), un par de siglos atrás trasnochaba a muchos matemáticos de su época para poder dar una explicación razonable a este hecho.

Algo tan natural como el primer conjunto de números que conocen los niños en la escuela, el conjunto de los números Naturales, es tan traumático cuando se llega a estudios superiores ya que no comprenden su infinitud, no saben en que momento esos poquitos números se transformaron en una cantidad inagotable de ellos, es por esto que un concepto que debeló tanto tiempo para su descubrimiento, al cual Georg Cantor llega a definir casi por accidente ya que no estaba trabajando propiamente en esta teoría, sea hoy día tan incomprendido.

Creo que por la falta de precisión en la enseñanza del concepto del infinito es que resultan la mayor parte de los problemas para los estudiantes de cálculo a la hora de aprender numerabilidad y no numerabilidad, cardinalidad, convergencia, continuidad, etc.

Una estrategia ampliamente utilizada en matemáticas es, introducir una noción nueva a partir de las ya existentes, y lo que es aún más interesante es que se presenta como la negación de un concepto ya introducido, y esta es una de las maneras como se presenta el infinito, como la negación de lo finito, es por esto que infinito es todo aquello que no tiene fin, que no se termina que no tiene un límite, que es indefinido, que es muy grande. El infinito si no se ve con cuidado puede presentar algunas contradicciones como por ejemplo hay muchos conjuntos con límites y acotados que son infinitos, como por ejemplo el intervalo [-1,1], si consideramos un conjunto con $2^{10000000}$ estaríamos ante un conjunto que es muy grande, pero que es finito.

A continuación se presenta una situación de los esfuerzos malos o buenos por tratar de explicar el concepto de infinito:

> "Una anécdota que se escucha frecuentemente en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica ilustra la forma en que se concibe el infinito de manera intuitiva: Sucedió durante una clase de Cálculo

Diferencial e Integral, cuando el profesor estaba desarrollando la teoría de límites al infinito y límites infinitos, un estudiante le preguntó: ¿Qué es el infinito? El Profesor le indicó, **El infinito es algo como esto....** Seguidamente tomó la tiza y comenzó a trazar una línea alrededor del aula dándole tres vueltas, luego sin dejar de trazar la línea, abrió la puerta y se fue... Los estudiantes se quedaron esperando pero el profesor no regresó. Cuando salieron vieron como la línea que el profesor trazó recorría las paredes, bajaba por las gradas y salía del edificio... A la clase siguiente, mientras los estudiantes esperaban la llegada del profesor, este se presentó trazando aún la línea con una tiza hasta llegar de nuevo a la pizarra y le dijo a los estudiantes: Bueno, esto no es el infinito pero al menos ya tienen una idea de lo que es....

Se ve que, aun cuando el profesor trató de dar un ejemplo bastante ilustrativo del infinito, siempre quedó encasillado en un ejemplo finito pero muy grande. El concepto de infinito no se puede formar a partir de metáforas como la anterior."

Es por lo anterior que se debe dar una definición rigurosa desde la matemática del concepto del infinito, aunque hasta antes de Georg Cantor se consideraba el concepto del Infinito como algo inaccesible y paradójico del cual nadie había podido ser claro y conciso a la hora de definirlo.

A lo largo de la historia grandes matemáticos han tratado de dar una definición del infinito, o más bien de considerar su existencia y de todas las posibles contradicciones que surgen de esta aceptación, como por ejemplo en la antigua Grecia tanto Aristóteles como Pitágoras y Platón pudieron aceptar la existencia del infinito, pero dadas todas las contradicciones que traía consigo la aceptación del infinito, Aristóteles decide rechazarla. Sin embargo, Aristóteles concibe el infinito de dos maneras diversas, las cuales son las nociones contemporáneas de esta noción. Aristóteles concibe un infinito potencial, este infinito potencial lo centró desde las operaciones ilimitadas y reiteradas, es decir una recursividad inagotable, este concepto de infinito es el adoptado en el desarrollo actual del concepto de límites al infinito y límites infinitos de los cálculos infinitesimal e integral, por otro lado al referirse al infinito actual, lo hace desde un infinito ya existente, un infinito como un todo o unidad y no como un proceso.

Es por esto que Kant se siente identificado con las nociones de Aristóteles, y aceptaba el infinito potencial, pero rechazaba el infinito actual, por ser imposible de ser alcanzado por la experiencia, ya que para Kant la experiencia era la manera de aprender los conceptos y en este mundo finito no podían concebir un todo como una parte infinita.

Representación de Arquímedes del Infinito

Para presentar un caso concreto con respecto a la aceptación del infinito potencial de Aristóteles, en la matemática moderna Arquímedes nos lo muestra con su propiedad Arquimediana, para indicar que, para cualquier cantidad N mayor que 0, es posible hallar un número natural t de manera que al superponer t veces la unidad μ se tiene t μ > N. De esta forma al tomar valores de N cada vez mayores es posible crear un proceso que tiende al infinito.

A continuación mostramos un esqueleto de este proceso:

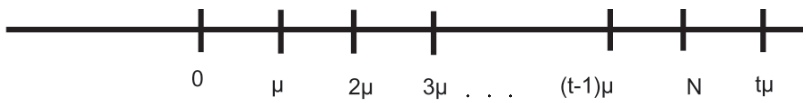

Imagen 2. Propiedad Arquimediana. Se representa el infinito potencial, donde se crece indefinidamente. Imagen realizada por el autor, desde sus conocimientos.

Representación de Xenón del Infinito

Podemos presentar el infinito potencial de otra manera, más bien en un proceso inverso, no ir superando la longitud de un segmento dado μ, sino más bien ir dividiendo la longitud de un segmento μ a la mitad y nuevamente este segmento se divide por la mitad, y este proceso se continua reiteradamente hasta obtener una cantidad ilimitada de segmentos todos contenidos en el segmento unidad de longitud μ. Esta fue la idea que produjo la paradoja de Xenón.

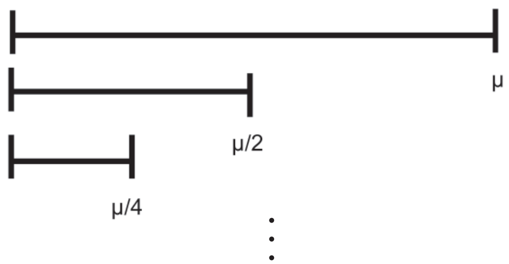

Imagen 3. Paradoja de Xenón. Se representa el infinito potencial, donde se decrece indefinidamente. Imagen realizada por el autor, desde sus conocimientos

Por otro lado, nos acercamos al punto coyuntural de este ensayo, la formalización de la noción del infinito actual o infinito como un todo, pero para esto se requiere todo el desarrollo de la teoría de conjuntos de Georg Cantor.

El inifinito de G. Cantor: fin al cuestionamiento

Iniciamos con el tratamiento, o el uso que hace Georg Cantor en sus trabajos sobre el infinito. Cuando este termina sus estudios en Berlín y se va a trabajar a la Universidad de Halle, conoce a Heine, con el cual investiga en conjunto, sobre el problema del momento en cuanto a series trigonométricas se refiere, Georg Cantor resuelve este problema en el cual usa el concepto del infinito, pero el infinito potencial, (tomándolo como medida de acercamiento o alejamiento) para ir a los límites de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, desde ahí en adelante Georg Cantor en sus trabajos usa la noción intuitiva del infinito. Georg Cantor no es el único que lo hace, esto ya se veía en los matemáticos anteriores a él, los matemáticos desde la antigüedad se preocupaban y usaban la noción de infinito, como por ejemplo, Euclides en sus Elementos Libro 1, al definir la noción de línea en la cual el infinito aparece implícitamente; Weierstrass en su teorías de continuidad y límites, etc.

En el trabajo de Georg Cantor sobre Densidad y conjuntos Derivados se ve más marcado el uso del símbolo infinito y en los cuales necesita nuevos símbolos para las posibles combinaciones que realiza con este. Ya en esta etapa los trabajos de Georg Cantor no se dedican a completar huecos como lo hace con los números racionales, sino que trata de trabajar de pleno con el infinito al cual trata de darle vida, algo que existe en verdad.

Georg Cantor en el siglo XIX desarrolló la teoría de conjuntos y como resultado de operar con esta nueva teoría y definir operaciones en ella, emergió la teoría de números transfinitos, con lo que se presenta todo un acontecimiento para su época, ya que esto nos indica que la existencia de un infinito potencial que es como él lo venía trabajando presupone la existencia de un infinito actual. Ya que el germen de este ensayo es el infinito, presentamos las definiciones de cardinalidad o potencia de un conjunto, que motivan este concepto, dentro de una teoría matemática lo que le da el rigor científico esperado desde hace mucho tiempo.

Aunque Georg Cantor ya trabaja como todo científico aceptando un infinito como la acepción de una variable la cual crece o decrece tanto como se quiera, al cual llama infinito impropio, también trabaja con algunos infinitos a los cuales les da algún nombre en especial como por ejemplo, el infinito determinado que no es más que aquel punto alejado al infinito sobre el que se observan las propiedades de funciones complejas y se da cuenta que estas propiedades no se alteran al acercar este punto, o simplemente especificar un punto que no esté alejado al infinito, que sea enteramente determinado.

Como es de nuestro conocimiento de los cursos recibidos en la carrera de matemáticas, se dice que dos conjuntos A y B son equipotentes o tienen la misma cardinalidad, es decir que tienen el mismo número de elementos si existe una función biyectiva entre A y B. Como esta relación es de equivalencia se puede entrar a definir que un conjunto A tienen n elementos si A es equipotente con un subconjunto de los números Naturales de n elementos, y así decimos que A tiene n elementos o que el cardinal de A es n. Cabe anotar que en los trabajos originales de Georg Cantor toda esta terminología de conjuntos él la llamaba variedades de números, pero es con el nombre actual que he querido introducirla sin perder de vista o referencia el trabajo original.

Es por esto que toda la teoría de conjuntos o de variedades desarrolladas por Georg Cantor nos da las bases para poder trabajar como lo hacemos hoy día; podemos decir que un conjunto es infinito si no es finito, pero se sabía ya desde antes de Georg Cantor, con lo que no es nada nuevo. La definición con más rigor es que un conjunto es infinito si tiene interminables elementos, pues no, esa tampoco es una definición con mayor rigor, traducido al lenguaje actual se dice que un conjunto es infinito si podemos establecer una equivalencia entre el conjunto y el conjunto de los números naturales.

Georg Cantor desarrolló la teoría de números transfinitos con la cual logró salvar la contradicción de la aniquilación de los números finitos por el infinito, la cual dice que al sumarle a un número finito el infinito, el infinito predomina y aniquila al número finito. Para esto construye los números a los que llamó Números Ordinales mediante las siguientes reglas a las que él llamo principios de generación:

1. 0 es un ordinal.
2. Si a es un número ordinal, entonces su sucesor a + 1 es un ordinal.
3. Si se tiene una sucesión de ordinales {a} entonces existe un último ordinal lim{a} el cual es mayor que todo a {a}.

De estos tres principios de generación se sigue que los números naturales son todos números ordinales. Más aún, el infinito potencial indicado por Aristóteles producto del proceso de contar es también un ordinal en virtud de la regla 3. A este ordinal se le denota por ω. La eliminación de los números finitos se salva mediante la regla 2 pues como ω es ordinal entonces su sucesor es un ordinal.

No ahondaré más sobre el transfinito ya que me salgo de los lineamientos iniciales de este artículo.

Es así que con el trabajo de Georg Cantor sobre el infinito se logra:

En primera instancia dar con rigor matemático una definición formal para el infinito, lo cual ataca con su teoría de variedades.

En segundo lugar se establece que hay variedad en los infinitos, que no todos son iguales en tamaño lo cual resuelve por medio de su teoría de números transfinitos. Dando esto solución a la paradoja de tener un conjunto infinito metido dentro de otro conjunto.

Es retomando estos conceptos, que matemáticos de primera línea posteriores a él, han sentado las bases de la matemática como la conocemos hoy. Cálculo infinitesimal, mecánica, teoría de funciones complejas, series de funciones.

Termino con uno de sus mayores contradictores de su época:

> "L. Kronecker con su epigrama: **Dios ha creado los números naturales, el resto es trabajo del hombre** y su pitagorismo meticuloso que insiste en descartar el infinito, edificando toda la Matemática a partir de los números Naturales y realizando operaciones constructivas en número finito, se coloca entre uno de los representantes más radicales del Finitismo al rechazar el infinito como: **. . . futilidad perniciosa heredada de filosofías anticuadas y teologías confusas, pudiendo llegar sin él tan lejos como se quiera. . . "** (Galera, 1995)**.**

Al mismo tiempo, Georg. Cantor escribía: **La Matemática es completamente libre en su desarrollo, y sus conceptos solo se ven restringidos por la necesidad de ser no contradictorios y están coordinados con los conceptos previamente introducidos mediante definiciones precisas. La esencia de la Matemática es su libertad,** prefiriendo siempre utilizar el término **Matemática libre**, al más generalizado **Matemática pura**.

Referencias

Agradeciendo el apoyo para la elaboración de este artículo a J. M. Nova y a su hija Luciana N. R.

Bermúdez, C. G. (2009). *G. Cantor Sistemas de números y conjuntos.* La Coruña, España: Universidade da Coruña.

Galera, M. C. (1995). La Controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del Infinito. En: *Divulgaciones Matemáticas* 3 (1/2), pp. 115-120. Maracaibo, Venezuela: Universidad de Zulia.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de Infinito. En: *Boletín Vol. I, Número* 2, pp. 59-81. Caracas, Venezuela. Versión Electrónica, editor Oswaldo Araujo.

Ramón, O. (1994). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. 1, Número 2*, pp. 59-81. Caracas, Venezuela. Versión Electrónica, editor Oswaldo Araujo.