APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA PARA EL CÁLCULO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL CAUCE DE UN RÍO Y PROCEDIMIENTOS AFINES

Application of the defined integral for the calculation of the cross section of a river channel and related procedures

CARLOS MANUEL MATA RODRÍGUEZ[1]

Recibido: 17 de mayo de 2024 Aceptado: 20 de junio de 2024

DOI: https://doi.org/10.21017/rimci.1091

Resumen

El cálculo del caudal de un río es un tema de notable interés en la historia de la ingeniería hidráulica, estrechamente vinculado a la construcción de presas. La determinación de la sección transversal de un cauce resulta a través de diversos métodos que, en dependencia de las características del perfil del lecho del río, pueden presentar relativa exactitud. En el artículo proponemos un procedimiento diseñado con polinomios de aproximación, que permite, mediante la aplicación del Cálculo Integral, obtener el área de la sección transversal con notable precisión.

Palabras clave: área de la sección transversal del cauce; caudal de un río; cálculo integral; perímetro mojado; polinomios; radio hidráulico.

Abstract

The calculation of the flow of a river is a topic of notable interest in the history of hydraulic engineering, closely linked to the construction of dams. The determination of the cross section of a channel result from various methods that, depending on the characteristics of the riverbed profile, can be relatively accurate. In the article we propose a procedure designed with polynomial approximation, which allows, through the application of Integral Calculus, to obtain the cross-sectional area with notable precision.

Keywords: cross-sectional area of flow; flow rater; integral calculus; hydraulic radius; wetted perimeter; polynomials.

I. Introducción

En ingeniería Hidráulica[2], especialmente en el diseño y trazado de presas, se hace imprescindible el estudio del caudal del río que servirá como elemento fundamental en su construcción[1][2].

La determinación mediante fórmulas del caudal de un río (también llamado gasto) es un tema clásico en la ingeniería hidráulica. Desde la ya lejana Edad Media este aspecto fue estudiado por destacados ingenieros de la época, entre los que podemos citar a Leonardo Da Vinci (1452-1519) en su célebre estudio sobre el recorrido de las aguas en el río Arno en Italia y al físico Evangelista Torricelli (1608-1647) quien publicó en Florencia en el año de 1641 un tratado relacionado con la Hidrostática[3]. Evangelista Torricelli (1608-1647) quien fue discípulo de Galileo y publicó en Florencia en el año de 1641 un tratado relacionado con la Hidrostática. Isaac Newton (1642-

B. Castelli
1577-1643

1 Licenciado en Matemáticas. Profesor Asistente de la Facultad de Ingeniería en la Universidad de Ciego de Ávila. Cuba. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0734-2612 Correo electrónico: cmatas1010@gmail.com

2 ὑδραγωγία, ας, ἡ *(sig.)* conducción de agua

3 Ley de Torricelli como una aplicación de la ecuación de Bernoulli.

1727) en su tratado “Principios matemáticos de la filosofía natural” publicado en Londres en 1687 en el tomo II, expone los elementos fundamentales de la hidrostática.

Pero la figura más importante en la materia es el ingeniero italiano Benedetto Castelli[3] que logró definir la fórmula fundamental para el cálculo del caudal de un río; dicha fórmula presenta total vigencia y será utilizada como base fundamental del presente artículo.

El caudal (que se expresa en m^3/s, y que depende de la velocidad del agua y de la altura-anchura que ocupe), de agua que circula por un río es el volumen de agua que atraviesa una sección cualquiera del río en una unidad de tiempo. Suponiendo que en todos los puntos de la sección seleccionada la velocidad es la misma (es decir tomando una velocidad media) el caudal se puede calcular como $\mathbf{Q=V_mA_{st}}$ donde A_{st} es el área de la sección transversal seleccionada.

La velocidad de las aguas en un río es influida por el rozamiento, la viscosidad, la tensión superficial y las irregularidades de la sección transversal, por otra parte, la tensión superficial origina retardo de las velocidades cerca de la superficie libre de la corriente. En general en las corrientes naturales, la distribución de la velocidad es bastante irregular.

El cálculo de la sección transversal de un río es tratado con profusión tanto en libros de texto como en Internet, presentándose diversos modelos geométricos para su determinación, dichos modelos tienen como fundamento el cálculo de la sección transversal del cauce, proponiendo procedimientos netamente simples, tales como el *promedio de las profundidades* o la *división del cauce en figuras geométricas* que incluyen triángulos, rectángulos y trapecios, como se muestra en la Fig. 1, para posteriormente hallar la suma de todas las áreas ($\sum_{i=1}^{5} a_i$) y determinar así el área la sección transversal.

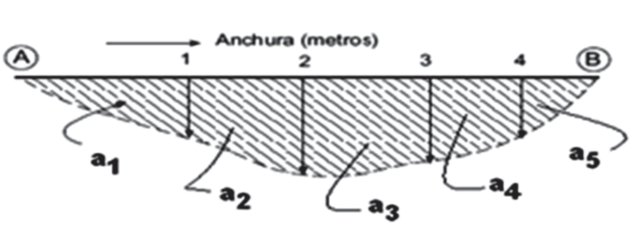

Fig. 1. División del cauce en figuras geométricas.

En el mejor de los casos, dichos modelos solo ofrecen un resultado lo suficientemente aproximado en dependencia del relieve del cauce, siendo aceptables cuando este presenta un fondo lo suficientemente lineal, pues prevalece la forma parabólica.

Queremos presentar, mediante un ejemplo, el procedimiento para el cálculo de la sección transversal de una corriente natural mediante la aplicación del Cálculo Integral, para lo cual se tomara como base un gráfico hipotético del cauce de un río, del *Tratado de Hidráulica de H.W. King[4]*

Para realizar el aforo, (aforar es el procedimiento para medir un caudal) metodológicamente se realizan los siguientes pasos:

Aforo / Cálculo del caudal en una sección de río

1. Definir la sección del río para aforar
   - Sitio estable
   - Sin obstáculos
   - Con flujo laminar
2. Medir ancho de río
   - Dividir por secciones = 0.5m
3. Medir profundidades de secciones
   - Sacar área de secciones (m^2)
4. Medir velocidad de corriente (m/s)
   - Calcular velocidades promedio por secciones
5. Calcular caudal (m^3/s)
   - Área m^2 * velocidad m/s en cada sección
   - Sumar caudal de todas las secciones

A continuación, se hará énfasis en el aspecto 3.

II. Procedimiento matemático

En la Fig. 2, se muestra la gráfica del cauce, con la referencia ya indicada.

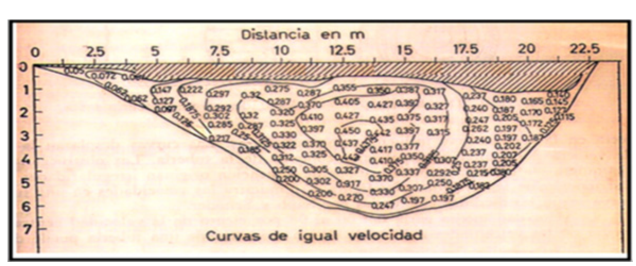

Fig. 2. Gráfica del cauce.

Lo primero que se debe hacer es llevar a un sistema de coordenadas cartesianas la imagen del cauce, situándola en el cuarto cuadrante, tal como se muestra en la Fig. 3.

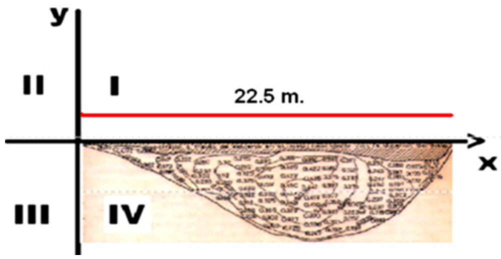

Fig. 3. Diagrama cartesiano

A continuación, se crea una tabla, tomando los datos a partir de la información obtenida de la Fig. 2, que representan los resultados de un conjunto de mediciones de la profundidad del río a lo largo de su sección transversal, siendo x la longitud del ancho y los valores de y las respectivas profundidades. La unidad de medida es el metro.

Se debe señalar que todo el procedimiento matemático, es realizado en MathCad[5].

El objetivo básico que se persigue es la determinación de una función polinomial la cual llamaremos **p(x)** que describa la profundidad del río para cada valor de x en un determinado grado, que adopte en forma aproximada el contorno del cauce, para posteriormente, determinar el área de la sección transversal mediante integración y de este modo determinar el caudal.

Primeramente, analizaremos el contorno mediante un polinomio de segundo grado (parábola).

Tabla I. Resultados de un conjunto de mediciones de la profundidad del río a lo largo de su sección transversal

datos :=

x	y
0.00	0.00
2.50	-1.00
5.00	-2.20
7.50	-3.50
10.00	-5.40
12.50	-6.20
15.00	-6.50
17.50	-6.00
20.00	-4.10
22.50	0.00

Se muestra a continuación la secuencia de operaciones matemáticas que permiten desarrollar el cálculo.

$\boxed{\mathbf{X := datos^{\langle 0 \rangle}}}$ $\boxed{\mathbf{Y := datos^{\langle 1 \rangle}}}$

CANTIDAD DE DATOS

$\boxed{\mathbf{n := rows(datos) = 10}}$

GRADO DEL POLINOMIO

$\mathbf{grd := 2}$

$\boxed{\mathbf{z := regress(X, Y, grd)}}$

$\boxed{\mathbf{fit(x) := interp(z, X, Y, x)}}$

$\boxed{\mathbf{coeffs := submatrix(z, 3, length(z) - 1, 0, 0)}}$

COEFICIENTES POLINOMIALES

$\mathbf{coeffs^T = (1.269 \quad -1.137 \quad 0.045)}$

Ahora se muestra la gráfica comparativa entre el contorno del cauce y el polinomio calculado en la Fig. 4.

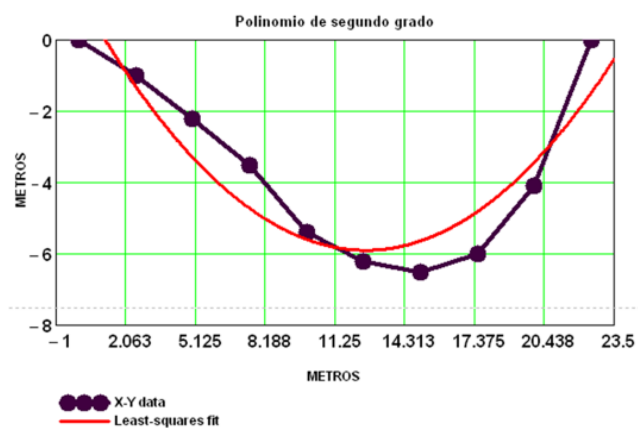

Fig. 4. Análisis comparativo.

Como aclaración, la línea con puntos representa el contorno del cauce en correspondencia con los datos de la tabla y la curva continua es la parábola de aproximación.

El coeficiente de determinación (CD) hallado es:

$$\boxed{\mathbf{CD := 100 \cdot \frac{\sum \overrightarrow{(fit(X) - mean(Y))^2}}{\sum \overrightarrow{(Y - mean(Y))^2}} = 84.2}} \ \%$$

Como se muestra en la gráfica, la función cuadrática no cumple con las expectativas esperadas. Por lo que repetimos el cálculo, ahora con un polinomio de tercer grado. grd: = 3. (la forma parabólica aparece con frecuencia en muchos cauces naturales y canales viejos de tierra).

Aquí se muestra la variante muy mejorada que se obtiene. Destacando el valor del coeficiente de determinación hallado. Fig. 5.

COEFICIENTE DE DETERMINACION (CD)

$$CD := 100 \cdot \frac{\sum \overrightarrow{(fit(X) - mean(Y))^2}}{\sum \overrightarrow{(Y - mean(Y))^2}} = \boxed{99.6}\ \%$$

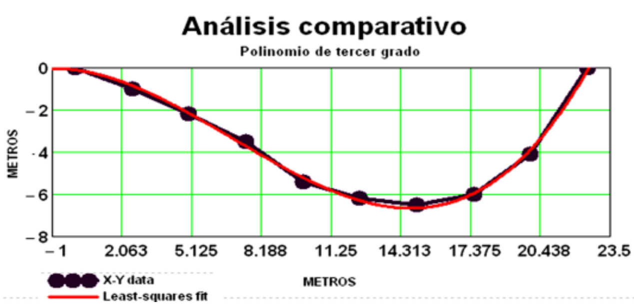

Fig. 5. Análisis comparativo con coeficiente de determinación (CD)

Podría conjeturarse que si se aumenta el grado del polinomio se obtendría mayor exactitud, se ha analizado la situación y se llega a la conclusión que no se logran mejores resultados y por otra parte se complicaría el procedimiento al utilizar un polinomio de grado superior.

Los coeficientes del polinomio cúbico así obtenido son:

$$a := 0$$

$$b := X_{n-1} = 22.5$$

$$\Delta := \frac{b - a}{4} = 5.625$$

$$A_1 := p(a) = -0.097$$

$$A_2 := 4 \cdot p(a + \Delta) = -10.136$$

$$A_3 := 2 \cdot p(a + 2 \cdot \Delta) = -11.645$$

$$A_4 := 4 \cdot p(a + 3 \cdot \Delta) = -25.035$$

$$A_5 := p(b) = -0.138$$

$$AREA := \frac{\Delta}{3} \cdot \left| \sum_{k=1}^{5} A_k \right| = 88.222$$

A continuación, determinamos el polinomio, expresando los coeficientes en notación matricial.

$$coef := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -0.097 \\ -0.138 \\ -0.072 \\ 3.469 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz, (**coef**) mediante el empleo de sumatoria se llega a su forma algebraica que se ha denominado por **p(x).**

$$p(x) := \sum_{j=3}^{grd+3} \left(coef_j \cdot x^{j-3} \right) \rightarrow 0.003469 \cdot x^3 - 0.072 \cdot x^2 - 0.138 \cdot x - 0.097$$

Solo resta, para determinar el Área de la sección transversal, calcular la integral indicada (tema clásico en Cálculo Integral), simbolizada por A_{st} donde la unidad de medida es el metro cuadrado[6].

$$A_{st} := \left| \int_0^{22.5} p(x)\, dx \right| = 88.222$$

De no poseer un software matemático, podemos calcular la integral definida, aplicando la regla de Thomas Simpson (matemático inglés, 1710-1761) como se muestra en la Fig. 6.

$$Q := V_m \cdot AREA \cdot m^2 = 30.88 \frac{m^3}{s}$$

Una vez calculada el área de la sección transversal, podemos aplicar la fórmula para determinar el caudal, para ello necesitamos conocer la velocidad media (V_m) de las aguas, antiguamente y para grandes ríos, solo se podía medir la velocidad en la superficie, por lo que la velocidad media para toda la profundidad se obtenía a partir de una formulación empírica. En la tercera década del siglo XX comienza la utilización de los molinetes que se introducen en la corriente para obtener velocidades del agua en numerosos puntos de su perfil. Para tener una buena medida del caudal hay que calcular la velocidad en muchos puntos. La velocidad es muy variable a lo largo de la sección del río, como ya hemos señalado, la más notable se registra en la parte superior y central del cauce y disminuye al acercarse al fondo y a las orillas[7]. Tomando supuestamente dicha velocidad por 0.35 m/seg calculamos el caudal:

Al resultado obtenido se puede multiplicarlo por el Factor de Corrección de Velocidad **(FCV)**, que para ríos profundos y lentos tiene por constante 0.75 y de este modo logramos mayor precisión[8].

$$FCV := 0.75$$
$$Q := V_m \cdot AREA \cdot m^2 \cdot FCV = 23.16\ \frac{m^3}{s}$$

Antes de finalizar, con los datos obtenidos en los cálculos, hallaremos *el radio hidráulico y* el valor de la *profundidad media.*

El radio hidráulico es el cociente entre la sección por donde circulan las aguas y el perímetro mojado[4,5]. Este radio se emplea en el cálculo de pérdidas de carga en la fórmula de Manning[9].

Rh = AREA de la secccion tansversal / PERIMETRO (Pm) mojado

$$AREA = 88.222\ m^2 \quad Pm := \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} p(x)\right)^2}\, dx = 26.98\ m$$

$$Rh := \frac{AREA}{Pm} = 3.27\ m$$

Profundidad Media (PM), *es el área de la sección transversal dividida por el ancho superior.*

$$PM := \frac{AREA \cdot m^2}{b \cdot m} = 3.921\ m$$

Donde b (ancho superior) es el límite superior de integración en la fórmula para determinar el área transversal.

III. Conclusiones

Conocido es que en Ingeniería Hidráulica muchos problemas pueden resolverse por distintos procedimientos. El modelo matemático aquí presentado para la determinación de la sección transversal del cauce de un río, y el cálculo del perímetro mojado, se cuenta entre ellos, no obstante, consideramos que el mismo debe tenerse en cuenta al efectuar los cálculos sobre los caudales, partiendo del hecho que la precisión obtenida supera otros métodos y su implementación en MathCad, posibilita su utilización con un alto grado de efectividad. Por último, podemos destacar desde el punto de vista pedagógico que para lograr un aprendizaje significativo es importante seleccionar problemas que despierten el interés de los alumnos (en especial en la carrera de ingeniería hidráulica) y cuya resolución permita integrar los contenidos de diferentes asignaturas.

Por otro lado, desde el enfoque docente,[10] la resolución del modelo matemático que representa este problema puede proponerse como una actividad atrayente para alumnos que cursan la asignatura Métodos Numéricos que forma parte del currículo de la carrera de Ingeniería Hidráulica. Un objetivo fundamental para los docentes de esta asignatura es lograr un aprendizaje significativo, basado en la realización de actividades relacionadas con problemas reales. No es fácil seleccionar problemas que sean atractivos para los alumnos, que permitan evaluar su desempeño y cuya complejidad no supere el nivel de un curso de pregrado.

Referencias

[1] E. Villarino, *Tratado básico de presas*, PARANINFO, Madrid. 2005.

[2] F. E. Dominy, *Diseño de presas pequeñas*, Bureau of Reclamation, New York. 1963.

[3] A. T. Grigorian, L. S. Polak, *Las ideas básicas de* la *física*, Ediciones Pueblos Unidos, Montevideo. 2011.

[4] H. W. King, *Manual de Hidráulica*, UTHEA, México. 1962.

[5] MathCad 15. *Manual de Usuario*, REVERTE. Madrid. 2015.

[6] R. Smith, R. Milton, CALCULUS, McGraw Hill Higher Education, New York. 2002.

4 Es la longitud de la línea de intersección del plano de la sección transversal con la superficie mojada del canal, dicha línea es calculada mediante la integral definida aplicando la fórmula de la longitud del arco.

Las fórmulas en las que interviene la pérdida de carga debido al rozamiento se expresan en función del radio hidráulico y se aplican a canales tanto naturales como artificiales.

5 Robert Manning (1816-1897), ingeniero hidráulico irlandés.

[7] C. V. Davis, *Tratado de Hidráulica aplicada*, Editorial Labor, (reimpresión ampliada). Madrid. 2020.

[8] V. L. Streeter, *Mecánica de los Fluidos*, Ediciones del Castillo, S.A. Madrid. 1968.

[9] I. H. Shames, *La Mecánica de los Fluidos*, Ediciones del Castillo, S.A. Madrid. 1969.

[10] J. Piaget, La enseñanza de las Matemáticas. Editorial Aguilar. Madrid. 2001.