RESOLUCIÓN DE MEMORETOS MEDIANTE UN PROCESO HEURÍSTICO

Resolution of memoretos through a heuristic process

MARCO VINICIO VÁSQUEZ BERNAL[1], MARÍA JOSÉ MATAILO ALVARADO[2]

Recibido: 21 de abril de 2024 Aceptado: 27 de mayo de 2024
DOI: https://doi.org/10.21017/rimci.1076

Resumen

Esta investigación se ha desarrollado en la Universidad Nacional de Educación de Ecuador partiendo de un espacio recreativo de un semanario de la provincia del Cañar denominado El Heraldo, donde a partir de marzo del 2014 se han publicado, semana a semana unos desafíos matemáticos que concitan el interés ciudadano y que, a criterio de los autores, tienen gran potencial para apoyar procesos de aprendizaje de matemáticas. Estos desafíos, denominados MemoRetos generan el interés de quien los aborda y desde ese interés posibilita explorar alternativas que con ayuda de conceptos matemáticos mínimos logran superar lo planteado, generando una sensación de éxito que ayuda significativamente para construir el conocimiento. Se ha determinado que la forma más adecuada para resolver los MemoRetos se sujeta a procesos heurísticos donde se privilegia el razonamiento y la selección de alternativas. En este trabajo se presenta ese proceso con ejemplos, aspirando que de esta manera se trasmita esta forma de accionar que permite desarrollar conceptos matemáticas desde la acción.

Palabras clave: MemoRetos; Procesos heurísticos; Aprendizaje matemático; Razonamiento matemático; Estrategias de resolución de problemas.

Abstract

This research has been developed at the National University of Education of Ecuador from a recreational space of a weekly newspaper of the province of Cañar called El Heraldo, where, starting in March 2014, mathematical challenges have been published week by week arraising citizen interest and that, in the authors' opinion, have great potential to support mathematics learning processes. These challenges, called MemoRetos, generate the interest of those who approach them and from that interest it makes it possible to explore alternatives that, with the help of minimal mathematical concepts, manage to overcome what was proposed, generating a feeling of success that significantly helps to build knowledge. It has been determined that the most appropriate way to solve MEMORIES is subject to heuristic processes where reasoning and the selection of alternatives are privileged. In this work, this process is presented with examples, hoping that in this way this way of acting that allows developing mathematical concepts from action is transmitted.

Keywords: MemoRetos; Heuristic processes; mathematical learning; mathematical reasoning; Problem solving strategies.

I. Introducción

Este artículo presentará una explicación de lo que son los MemoRetos, con su estructura y sus elementos, luego se planteará una forma de resolverlos con procesos heurísticos y el apoyo de operaciones aritméticas básicas.

A criterio de los investigadores son varios los contenidos matemáticos que pueden ser abordados en este proceso, sin embargo se estima que lo más relevante en este caso es la reflexión que surge del proceso, reflexión que rebasa la solución de desafíos matemáticos ya que permite entender como la construcción de conocimiento matemático surge de la practica diaria.

A la vez se evidencia que la asimilación de conocimiento matemático puede generarse en ambientes amigables.

1 Universidad Nacional de Educación de Ecuador – UNAE, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9129-0178 Correo: marco.vasquez@unae.edu.co
2 Universidad Nacional de Educación de Ecuador – UNAE, ORCID: https://orcid.org/0009-0006-6287-4223 Correo: maria.matailo@unae.edu.co

II. Definición

MEMORETO: Desafío matemático que conjuga contenidos básicos de geometría y aritmética y que ayuda la asimilación de conceptos matemáticos.

Los MemoRetos son desafíos matemáticos, por tanto su origen es incierto ya que debieron iniciarse como formas de esparcimiento, en junio del 2013, en una columna del semanario "El Heraldo" que se publica en la ciudad de Azogues, Ecuador, se inició la publicación de uno de estos desafíos por edición.

La acogida de la sección motivo interés por entender un procedimiento sistematizado para su resolución así como también para su construcción, además docentes de matemáticas de unidades educativas del área donde circula el semanario indicaban que habían incorporado la resolución de este desafío como parte de su desempeño docente.

En consecuencia, y teniendo en cuenta que me desempeño como docente investigador de la Universidad Nacional de Educación de Ecuador, UNAE, se inició un proceso de investigación con el objetivo de que la construcción y resolución de estos apoyen procesos de aprendizaje de matemáticas [1].

En el año 2021, se publicó el libro MemoRetos, Propuesta Pedagógica para Enseñar Matemáticas" [2], donde se presenta un procedimiento debidamente sistematizado para la resolución de estos desafíos, se presentan los resultados de investigación sobre la aceptación de los mismo y se les asigna el nombre de MemoRetos, nombre que responde a razones absolutamente personales.

A la par, la investigación y la socialización de esta propuesta en conferencias, talleres y en un certamen han permitido avanzar en la profundización del estudio sobre las formas de resolución y su utilidad en el campo educativo.

III. Estructura

Un MemoReto se compone de dos partes que se complementan entre si:

- Un texto explicativo, a través del cual se describe sus elementos geométricos, sus elementos operativos (en la mayoría de los caso números enteros) y la condición que debe satisfacerse.

- Un gráfico donde se entrelazan sus figuras geométricas y donde se establecen claramente los espacios donde deben ubicarse los elementos operativos (Fig. 1).

Nota: Un MemoReto existe únicamente si es posible satisfacer la condición presentada.

Ejemplo:

MEMORETO: Se han dibujado dos rectángulos y dos elipses, tal como se observa en la figura, generando trece puntos de intersección, se pide ubicar en cada corte un número entero múltiplo de tres, del seis al cuarenta y dos, sin repetición, de tal forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea el mismo.

Está claro que un MemoReto puede entenderse únicamente si se conjuga el texto con su gráfico.

Sin embargo la existencia de estos dos componentes, en ningún caso garantiza que el MemoReto exista ya que existen casos donde teniendo un texto con los elementos necesarios y un gráfico complementario, no es posible cumplir la condición propuesta y por lo tanto NO existe MemoReto.

Por lo tanto, para el ejemplo presentado, para decir que ese MemoReto existe debe existir al menos una solución [3].

En la Fig. 2 se puede observar que en los respectivo espacios de intersección se han ubicado los elementos operativos (múltiplos de tres entre seis y treinta y nueve) y que se cumple la condición propuesta (los elementos operativos ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras suman ciento cincuenta y seis). Por lo tanto este ejercicio si es un MemoReto.

A. Proceso

El proceso de solución de un Memoreto se explicará resolviendo el siguiente:

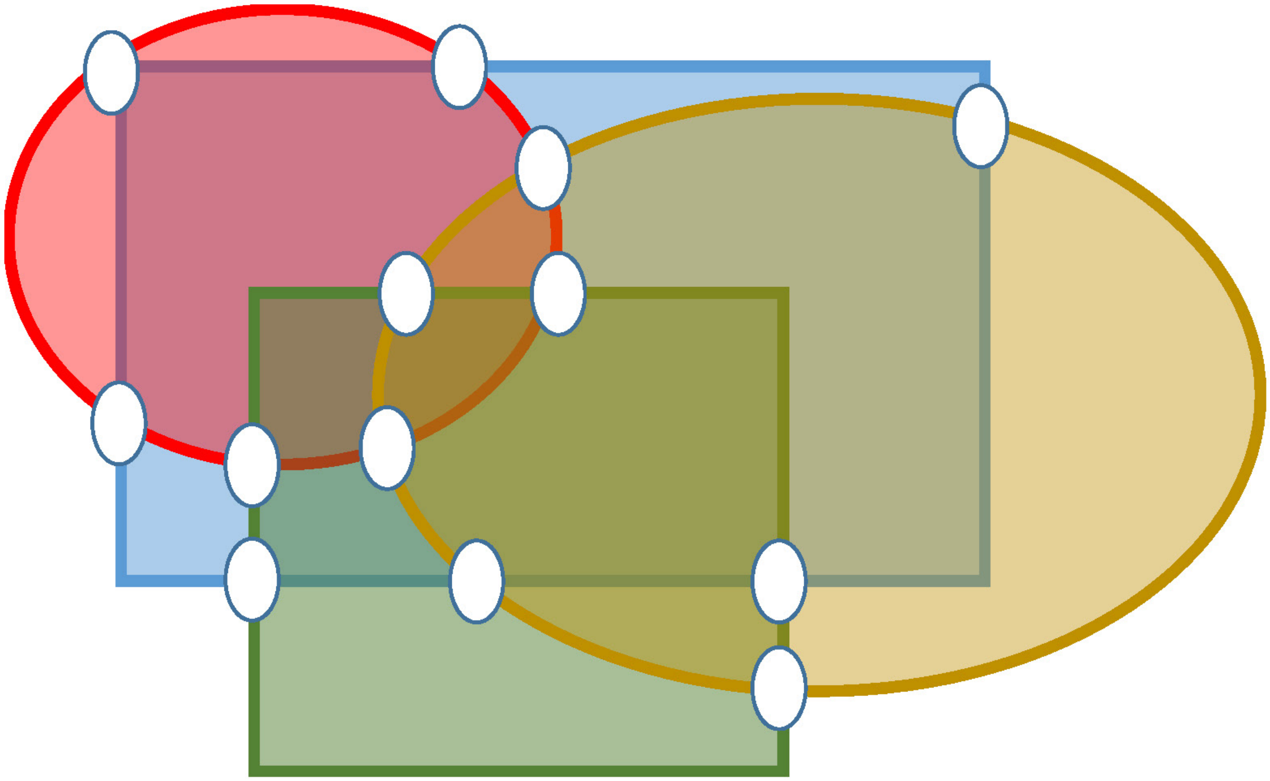


Fig. 1. Ejemplo de MemoReto. Fuente: Elaboración propia.

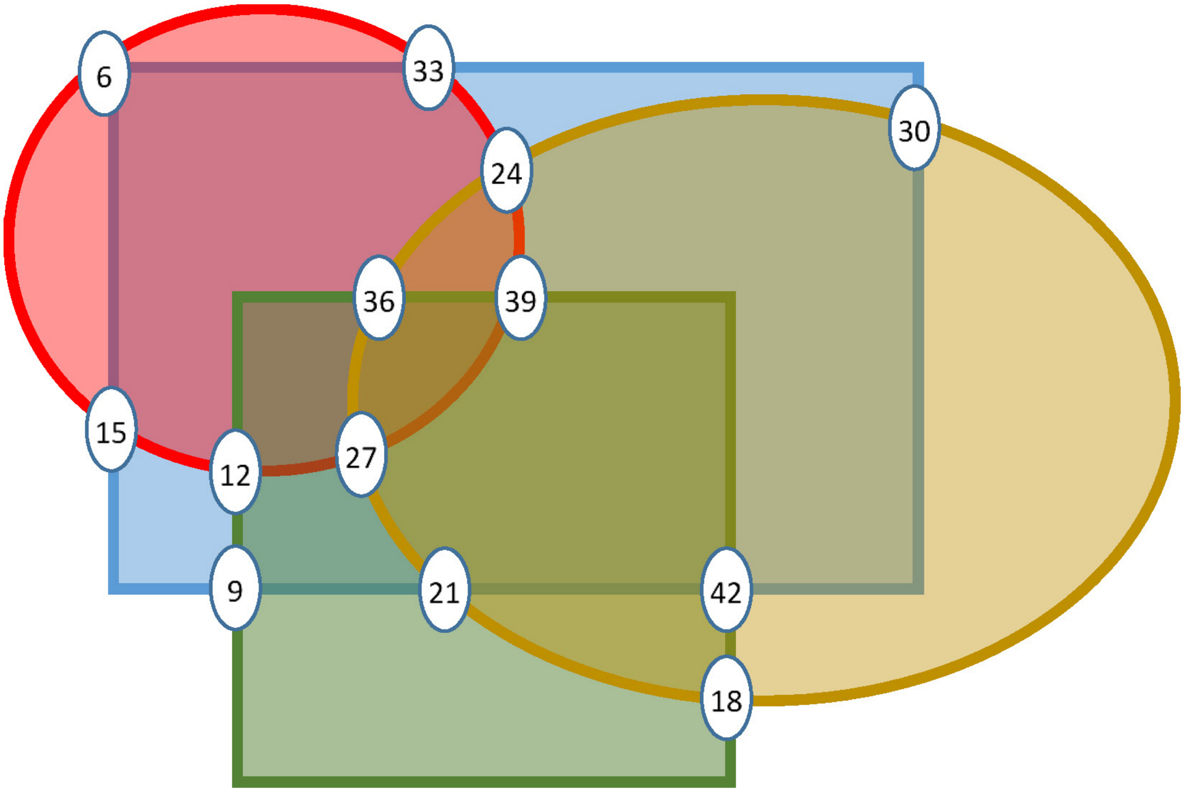


Fig. 2. Resolución del MemoReto. Fuente: Elaboración propia.

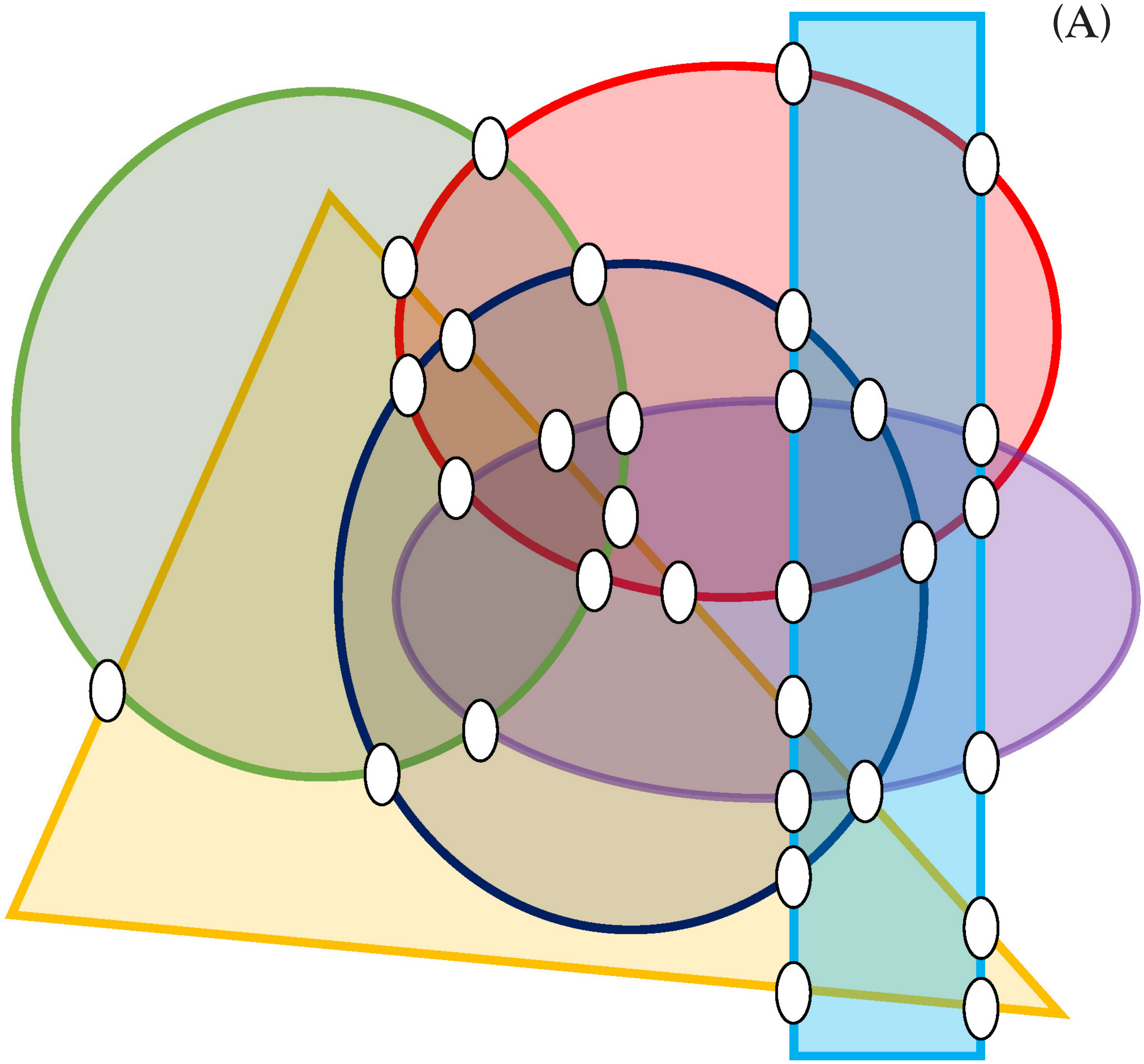
***MEMORETO:** Se han dibujado cuatro elipses, un rectángulo y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando treinta y dos puntos de corte, se pide ubicar en cada punto de corte, sin repetir, un entero positivo menor que treinta y tres, de tal forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las seis figuras, el resultado sea el mismo.*

Para iniciar se ubicarán en cada punto de corte, de manera arbitraria un número entero que cumpla lo indicado en los puntos de corte, así en la figura siguiente se han ubicado los números enteros del uno al treinta de forma absolutamente arbitraria (A).

Sumando los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras(B) se tiene:

Elipse verde	(EV) – 174
Elipse roja	(ER) – 150
Elipse lila	(EL) – 183
Elipse negra	(EN) – 135
Rectángulo Azul	(RA) – 226
Triángulo Amarillo	(TA) – 208

(A)



Las seis figuras suman 1076 y su promedio es 179.333, que no es un número entero. Este valor no puede ser el valor de equilibrio en vista de que ese valor de equilibrio debe ser la suma de los valores que se ubican en los contornos y como estos son enteros su suma será también un entero.

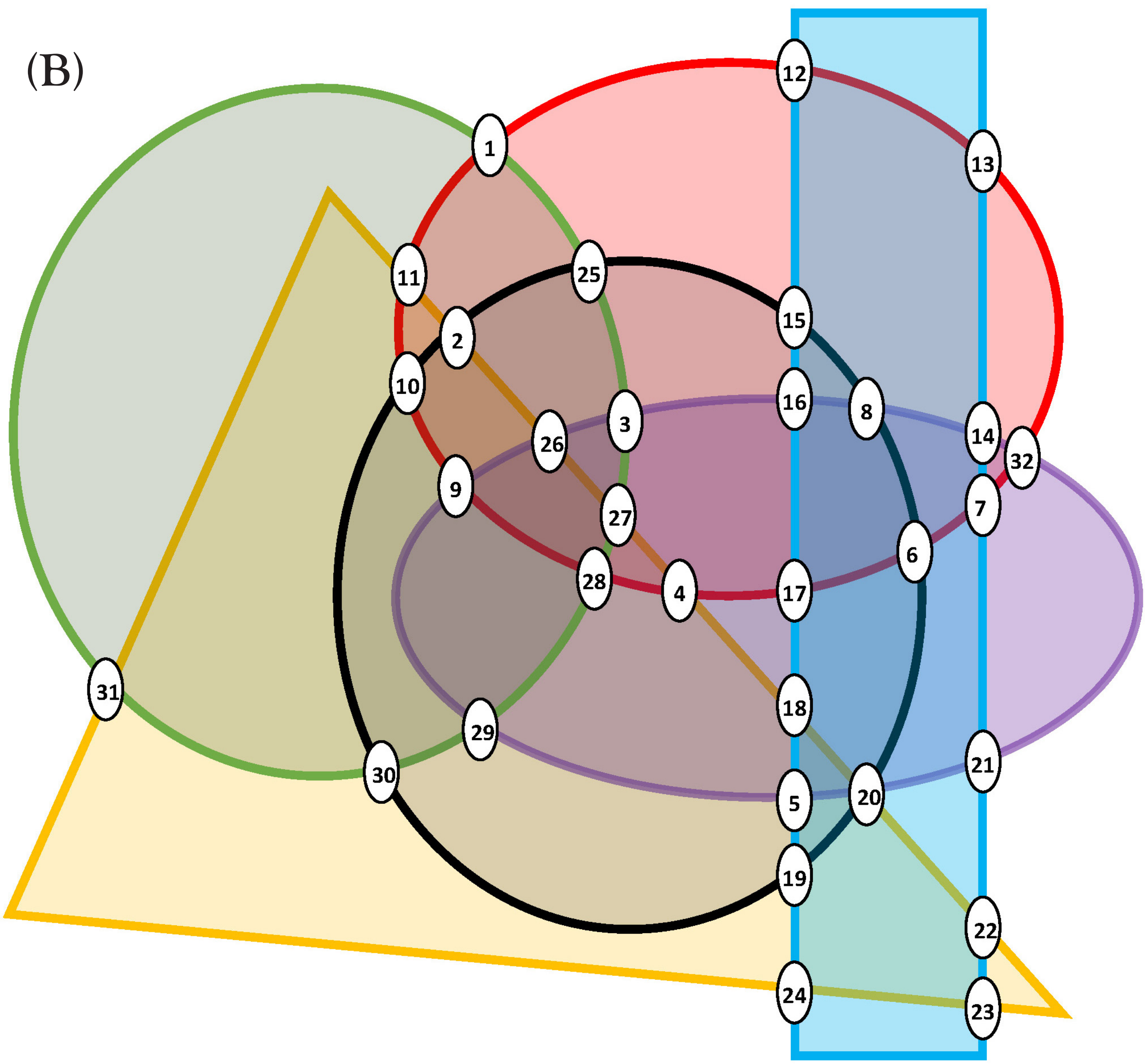
Con la intención de buscar un equilibrio entre los valores obtenidos para cada figura, se debe buscar un número entero próximo a 179.333.

En este caso como el punto de corte donde se ha ubicado el número 20 es una intersección de tres figuras (todos los demás son intersecciones de dos figuras), si se cambia el 20 por otro valor, cambiaran las figuras involucradas y cambiará el promedio.

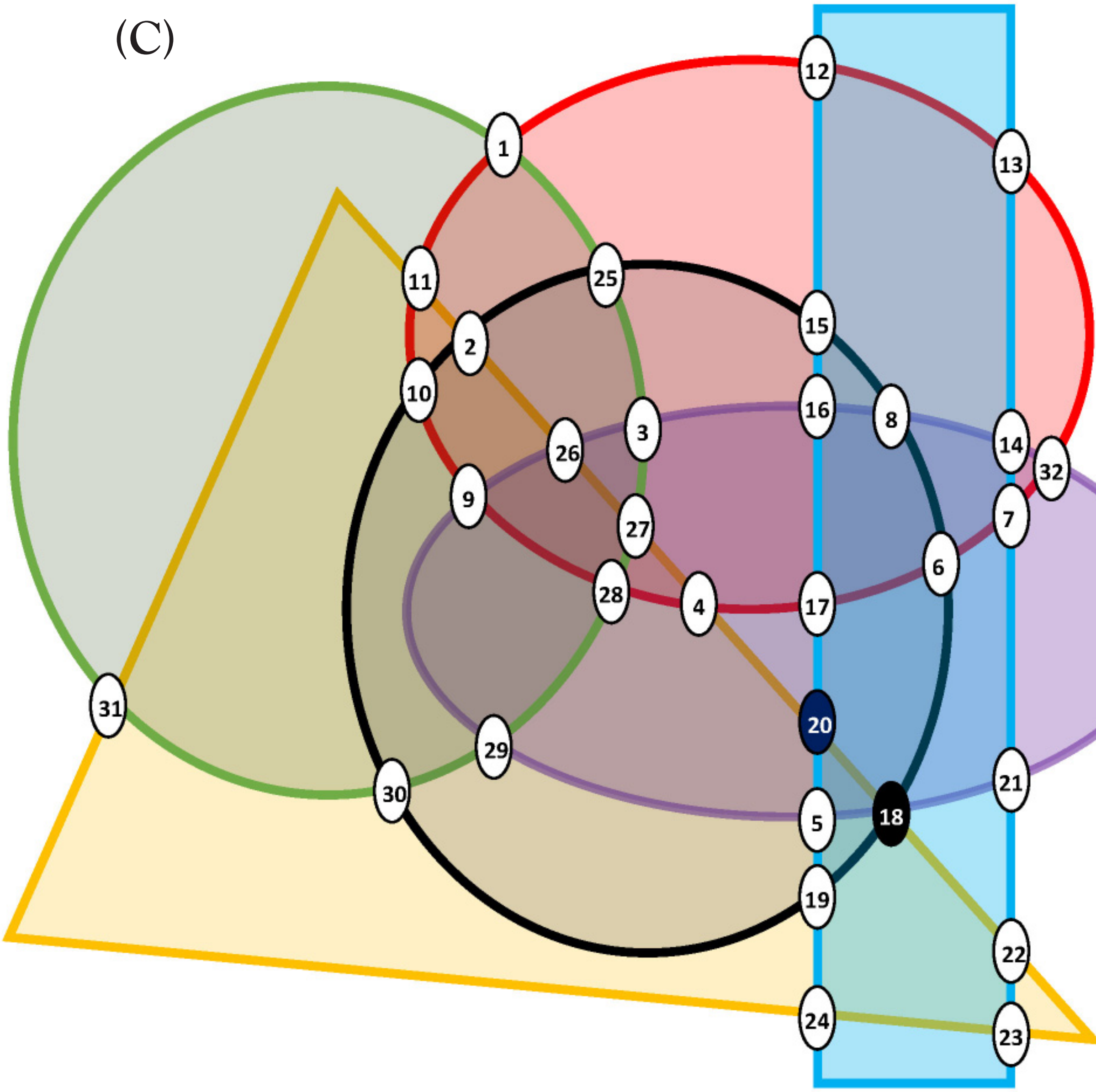
Así, al cambiar el 20 por el 18, cambiará el resultado de la elipse lila, de la elipse negra y del rectángulo azul, el total de la suma en el triángulo amarillo no cambia, ya que los dos elementos si bien se cambian entre sí, los dos están dentro de esta figura (C).

Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene:

(B)



(C)



Elipse verde	(EV) – 174
Elipse roja	(ER) – 150
Elipse lila	(EL) – 181
Elipse negra	(EN) – 133
Rectángulo Azul	(RA) – 228
Triángulo Amarillo	(TA) – 208

Las seis figuras, ahora suman 1074 y su promedio es 179, que si es un número entero, por lo que se propondrá esta como el valor que equilibra las sumas de las seis figuras y se propondrá a este valor (179) como el valor que deben sumar los elementos ubicados en el contorno de cualquiera de las seis figuras.

Debe tenerse en cuenta que el valor de 18 ubicado en la intersección triple permite establecer ese valor de equilibrios, si se cambia el 18 por otro el valor de equilibrio cambiara, pudiendo ser un valor entero o no. En el caso de que sea otro entero, se planeará ese como el valor que equilibra las sumas de los elementos de las seis figuras.

Luego iniciaremos el proceso para equilibrar los valores de cada figura hacia el valor propuesto, que en este caso es 179.

Así, vemos que la sumatoria de los elementos de la EV es 174, por tanto debe aumentarse 5, para ello se cambia el 1 por el 6 generando cambios en la EV (aumenta 5) y EN (disminuye 5), en la EV, si bien se cambia la ubicación, no cambia el total de la suma por cuanto el 1 y el 6 están en la ER (D).

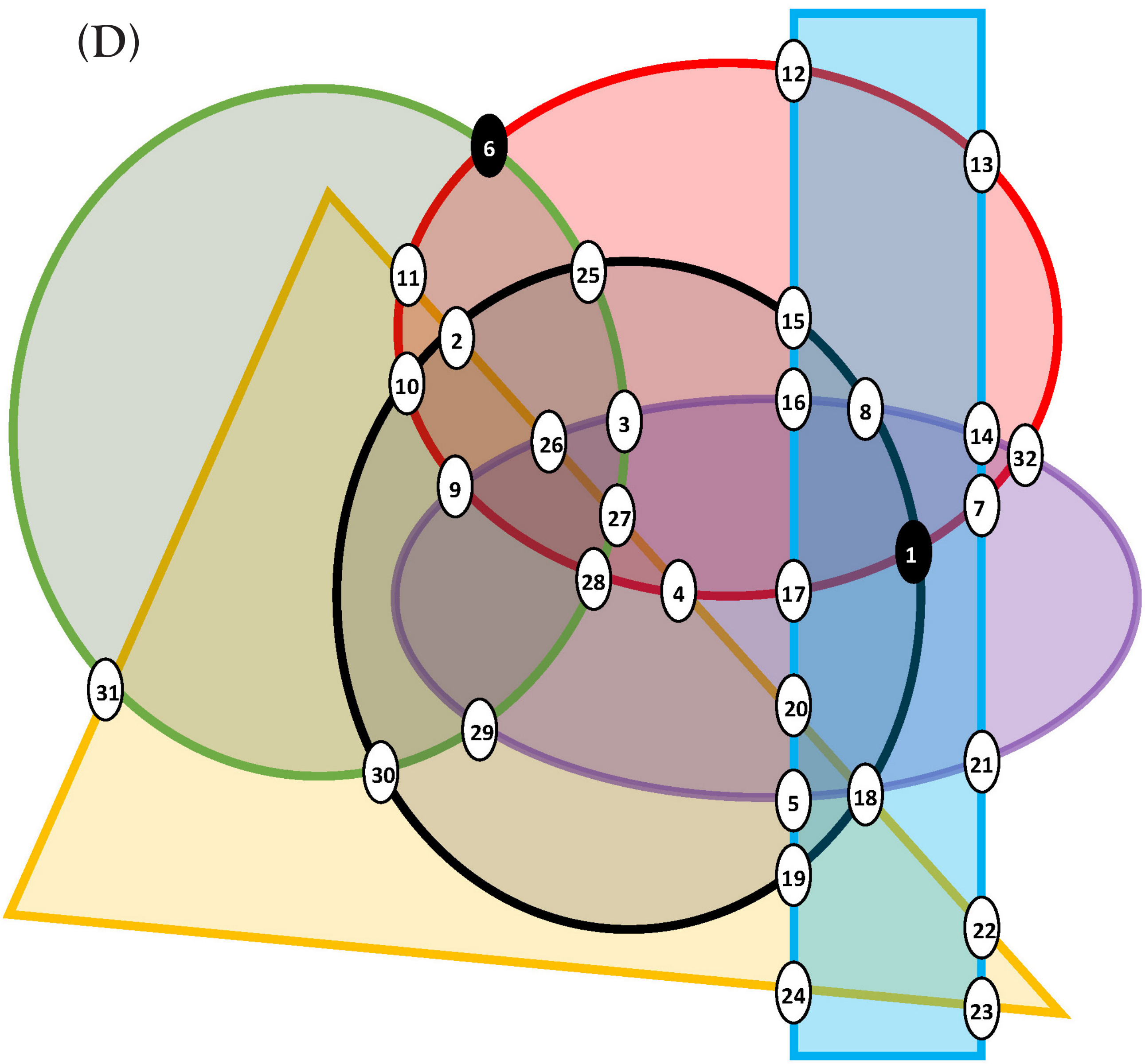
Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene:

Elipse verde	(EV) – 179
Elipse roja	(ER) – 150
Elipse lila	(EL) – 181
Elipse negra	(EN) – **128**
Rectángulo Azul	(RA) – 228
Triangulo Amarillo	(TA) – 208

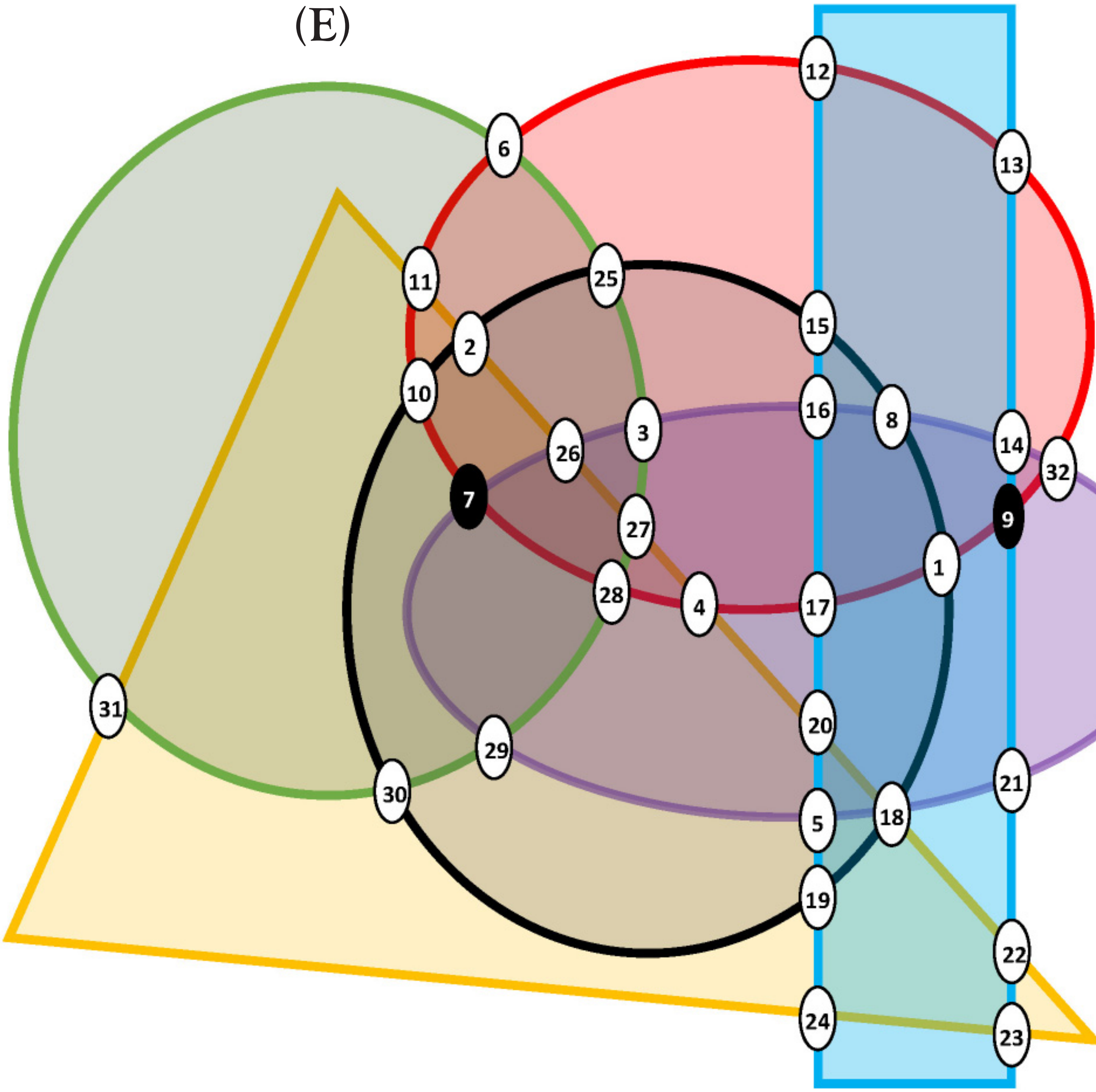
A continuación para equilibrar la EL, se debe hacer un cambio que disminuya su suma en 2, por tanto se cambiará el 9 con el 7 que genera cambios en la EL (disminuye 2) y RA (aumenta 2), como los dos elementos están en el RA, el resultado de la suma en esta figura se mantiene (E).

Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene:

(D)



(E)



Elipse verde (EV) – 179
Elipse roja (ER) – 150
Elipse lila (EL) – **179**
Elipse negra (EN) – 128
Rectángulo Azul (RA) – **230**
Triangulo Amarillo (TA) – 208

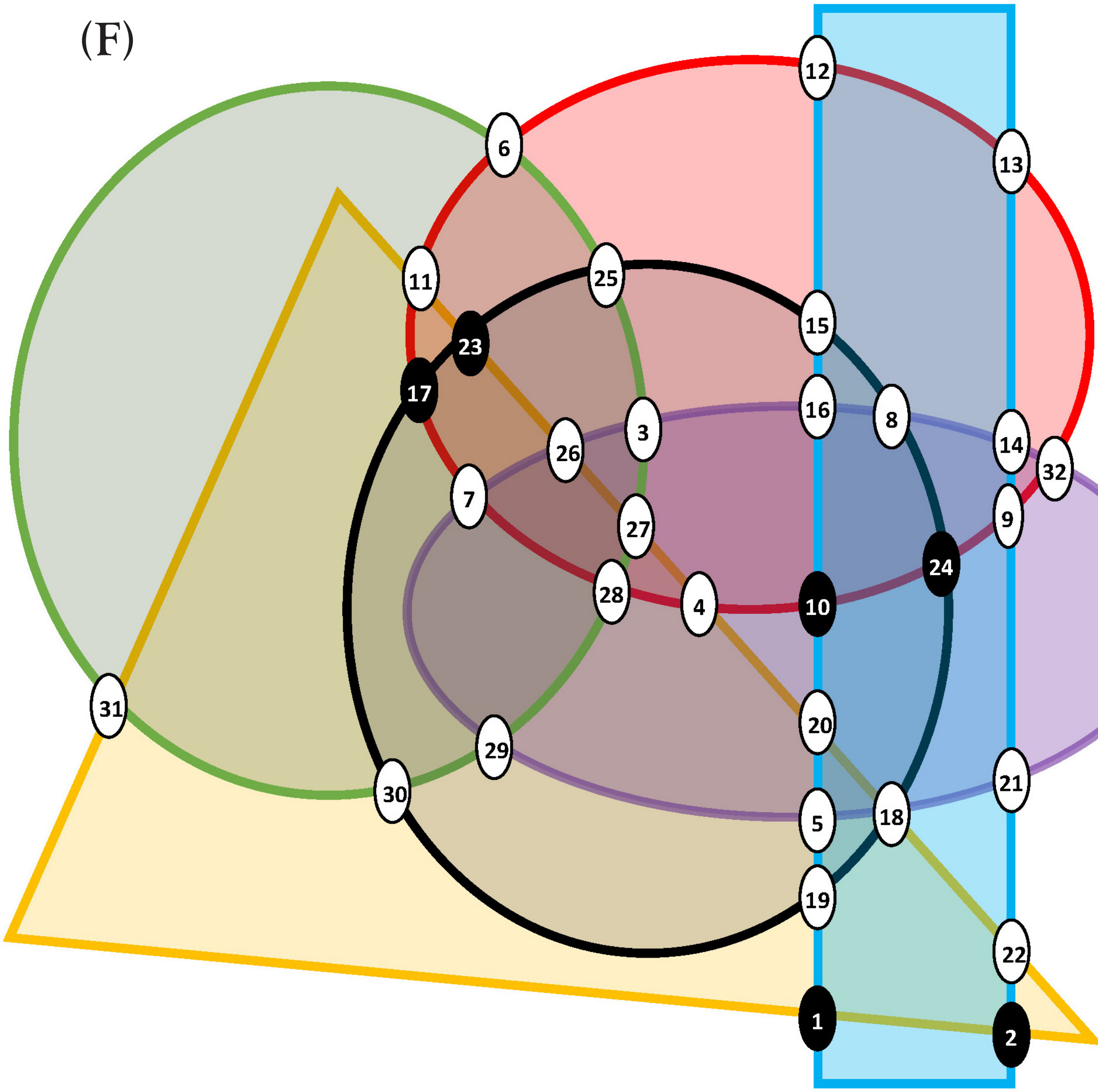
Continuamos equilibrando el RA (F), donde debe disminuirse la suma de sus elementos en 51, por tanto se propone tres cambios:

- Cambiar 24 con el 1, así RA y TA disminuyen 23, ER y EN aumentan 23.
- Cambiar 23 con el 2, así RA disminuye 21 y EN aumenta 21, no se afecta TA.
- Cambiar 17 con el 10, así RA disminuye 7 y EN aumenta 7, no se afecta total de ER.

Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene:

Elipse verde (EV) – 179
Elipse roja (ER) – **173**

(F)



Elipse lila (EL) – 179
Elipse negra (EN) – **179**
Rectángulo Azul (RA) – **179**
Triangulo Amarillo (TA) – **185**

En este caso se ha logrado además que EN también alcance el valor de equilibrio.

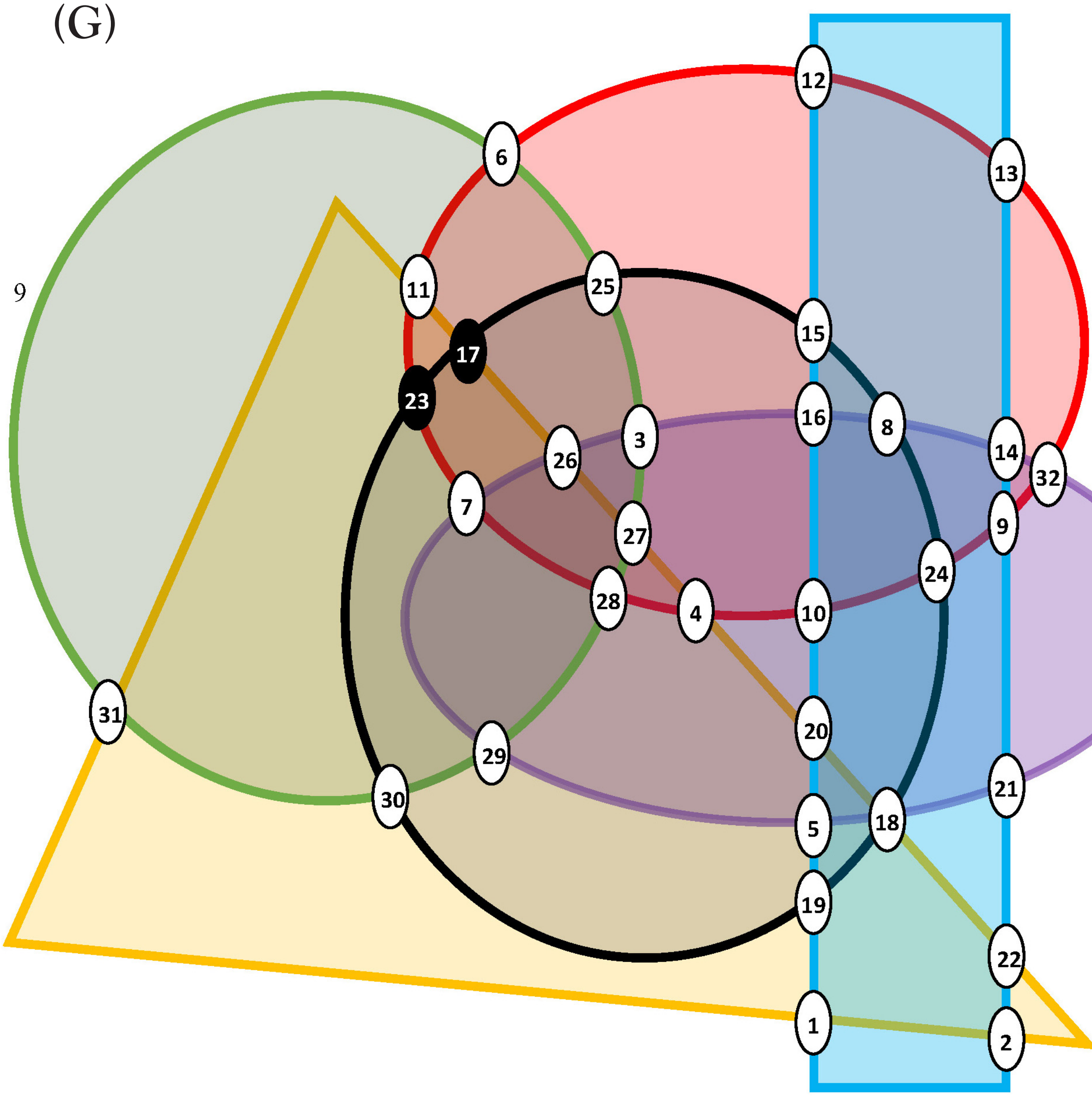
Por último, debe buscarse el equilibrio para una de las dos figuras cuyas suma de elementos aun no es 179, a sabiendas de que si se cumple para uno, se cumplirá también para la otra.

Por tanto, teniendo en cuenta que la suma de los elementos de la ER es 173, deberá aumentarse a esto el valor de seis, lo que es posible si cambiamos el 17 con el 23, lo que ocasionará que la ER aumente 6 y el TA disminuya 6, sin afectar el total de la EN en vista de que los elemento se mueven dentro de esa figura (G).

B. Proceso de Solución

Este proceso, que es uno más de las distintas alternativas que existen para resolución de los

(G)



MemoRetos, puede esquematizarse en los siguientes pasos:

1. Entender el MemeReto.
2. Llenar el MemoReto asignando arbitrariamente los valores.
3. Proponer un valor de equilibrio (se sugiere usar el concepto de promedio).
4. Llenar una a una las figuras en función del valor de equilibrio propuesto.
5. Si no es posible, regresar al paso 2 y proponer otro valor de equilibrio.
6. Comprobar la solución.
7. Presentar la solución.

C. Posibles soluciones

POR VALORES DE EQUILIBRIO

Lo abierto del proceso permite asegurar que existen otras soluciones posibles que surgen ya sea por la determinación de otros valores de equilibrio o por variaciones entre los elementos operativos de una solución determinada.

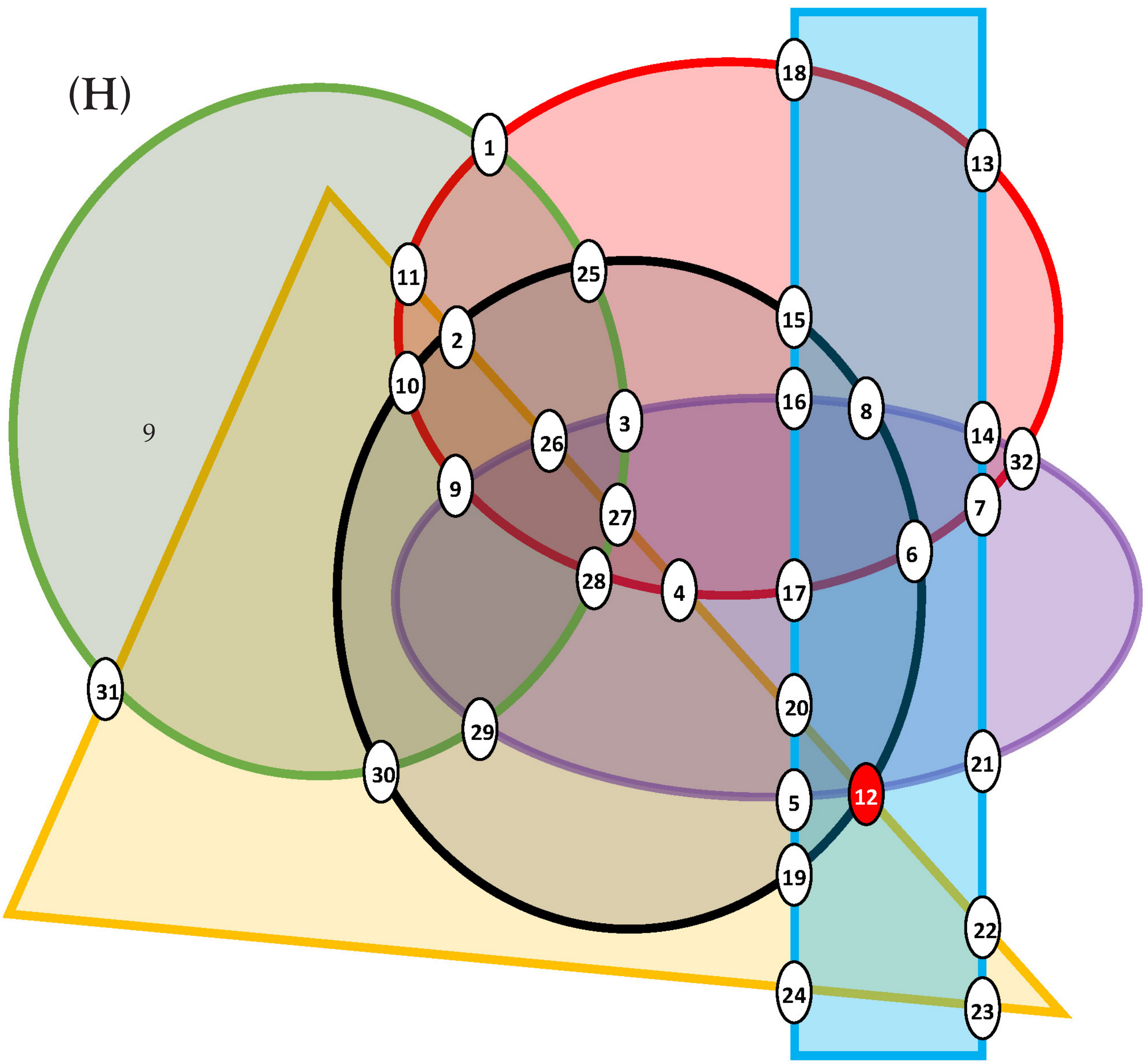
A fin de explicar mejor estas otras soluciones, en el ejemplo que se presenta se cambiara el valor ubicado en la intersección triple de 18 a 12, se tendrá lo siguiente (H):

Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene:

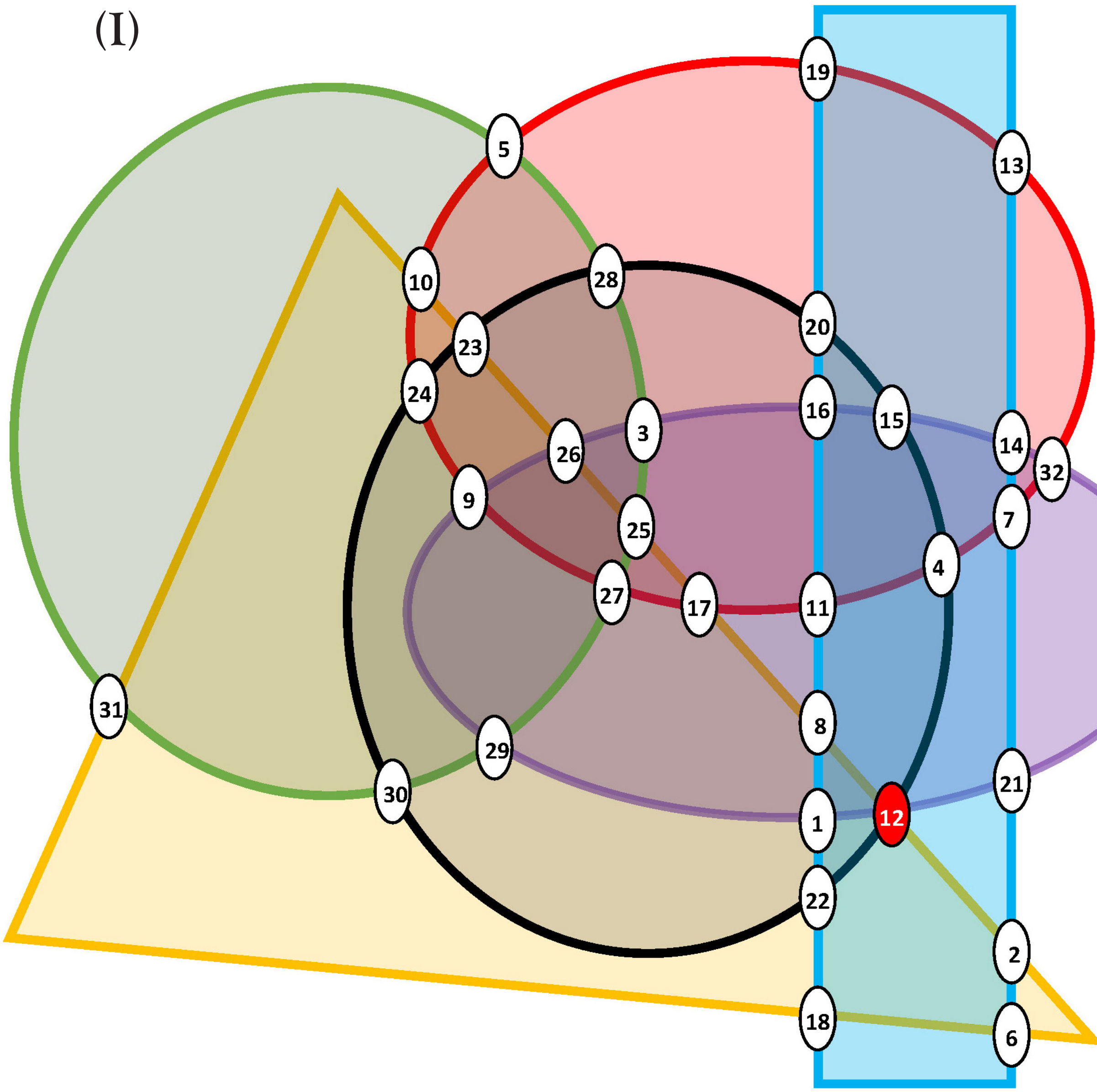
Elipse verde	(EV) – 174
Elipse roja	(ER) – 156
Elipse lila	(EL) – 175
Elipse negra	(EN) – 127
Rectángulo Azul	(RA) – 234
Triangulo Amarillo	(TA) – 202

Por tanto, el total de la suma en las seis figuras es 1068, cuyo promedio es 178, valor entero por lo que puede proponerse como valor de equilibrio para luego de los cambios necesarios es posible construir la siguiente solución (I).

(H)



(I)



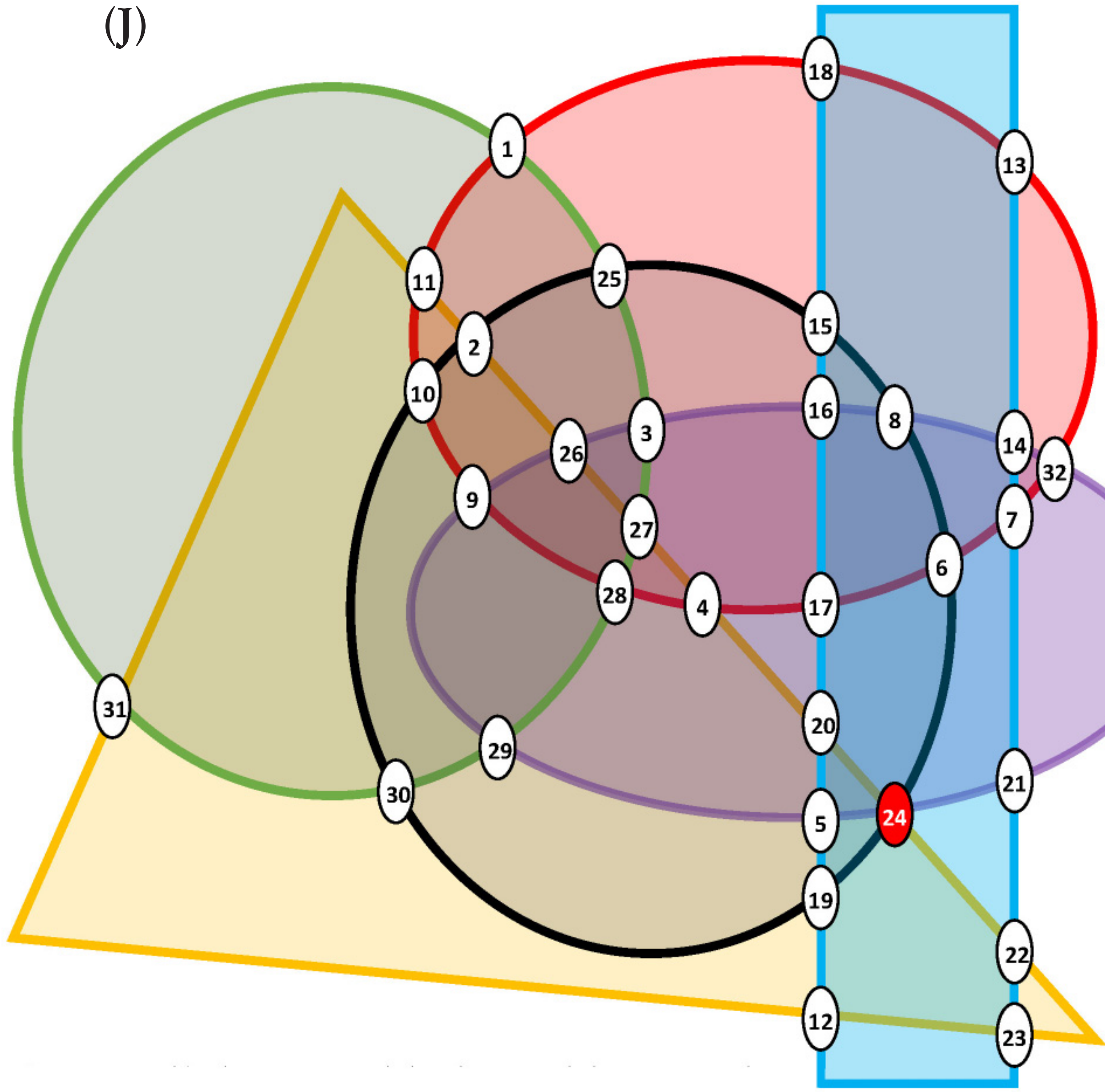
Elipse verde	(EV) – 178
Elipse roja	(ER) – 178
Elipse lila	(EL) – 178
Elipse negra	(EN) – 178
Rectángulo Azul	(RA) – 178
Triangulo Amarillo	(TA) – 178

Va quedando claro que el valor que se ubique en la intersección triple es determinante para calcular el punto de equilibrio, en este caso debe ubicarse un elemento operativo que aumente o disminuya de 18 un valor múltiplo de 6, así se asegura que el promedio sea un número entero, que como se dijo anteriormente es una condición que debe cumplirse para proponer un valor de equilibrio.

Es fácil de verificar que si cambiamos valores entre las intersecciones dobles, los valores aumentaran o disminuirán en las figuras que intervengan y puesto que son intesecciones de dos figuras, la misma cantidad que se suma en dos de ellas se disminuirá en las otras dos por tanto no variara ni el total ni su promedio.

Según esto los posibles valores de equilibrio para el caso del ejemplo serían 6, 12, 18, 24 y 30 (J).

(J)



En el case del 24 se tendría:

Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene:

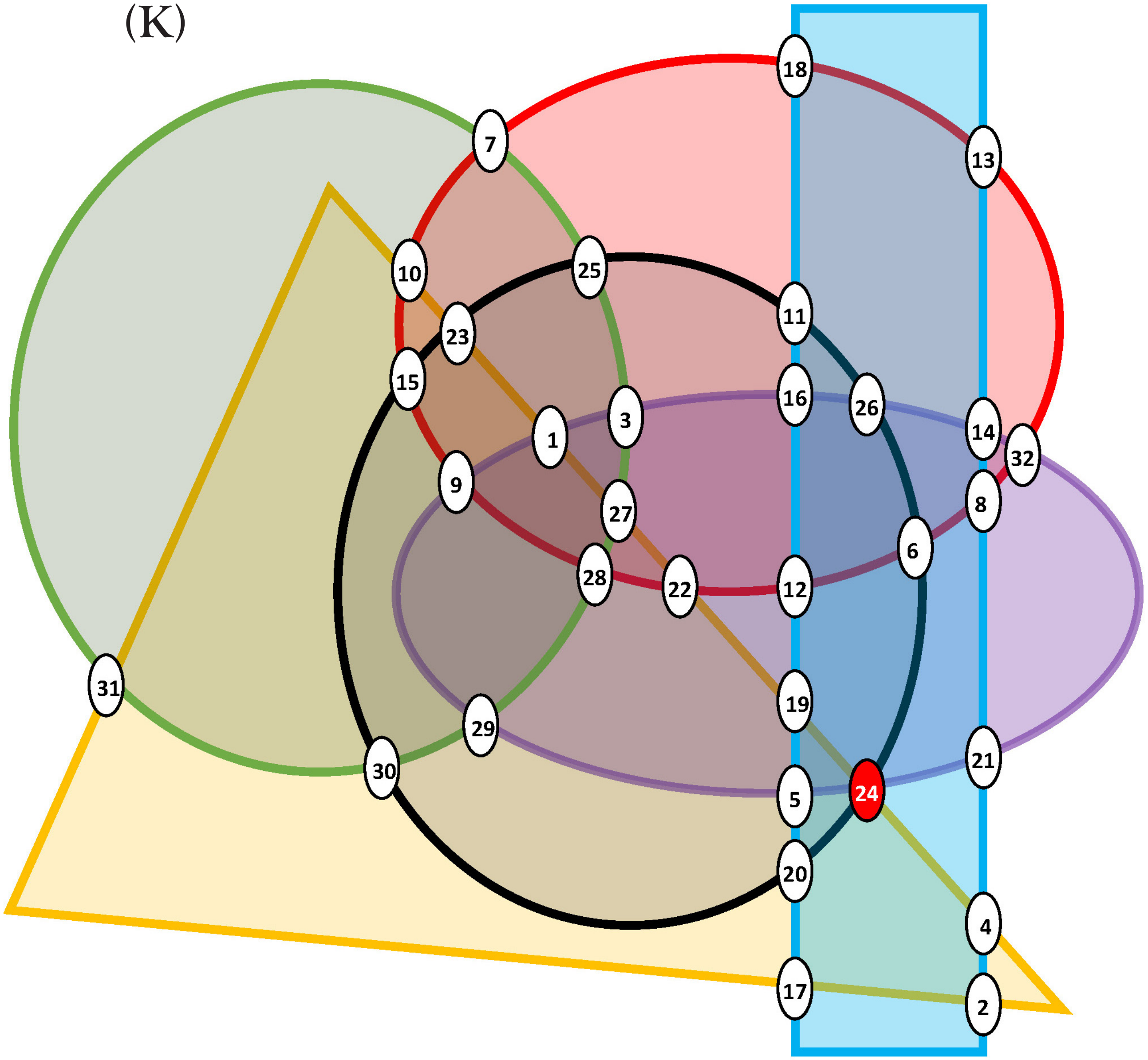
Elipse verde (EV) – 174
Elipse roja (ER) – 156
Elipse lila (EL) – 187
Elipse negra (EN) – 139
Rectángulo Azul (RA) – 222
Triangulo Amarillo (TA) – 202

Por tanto, el total de la suma en las seis figuras es 1068, cuyo promedio es 180, valor entero por lo que puede proponerse como valor de equilibrio para luego de los cambios necesarios es posible construir la siguiente solución (K).

Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene:

Elipse verde (EV) – 180
Elipse roja (ER) – 180

(K)



Elipse lila (EL) – 180
Elipse negra (EN) – 180
Rectángulo Azul (RA) – 180
Triangulo Amarillo (TA) – 180

De forma similar es posible proponer también valores de equilibrio si se ubica en la intersección triple el 6 o el 30, por lo visto estas serán 177 y 181 respectivamente, desarrollando el proceso se tendrá (L):

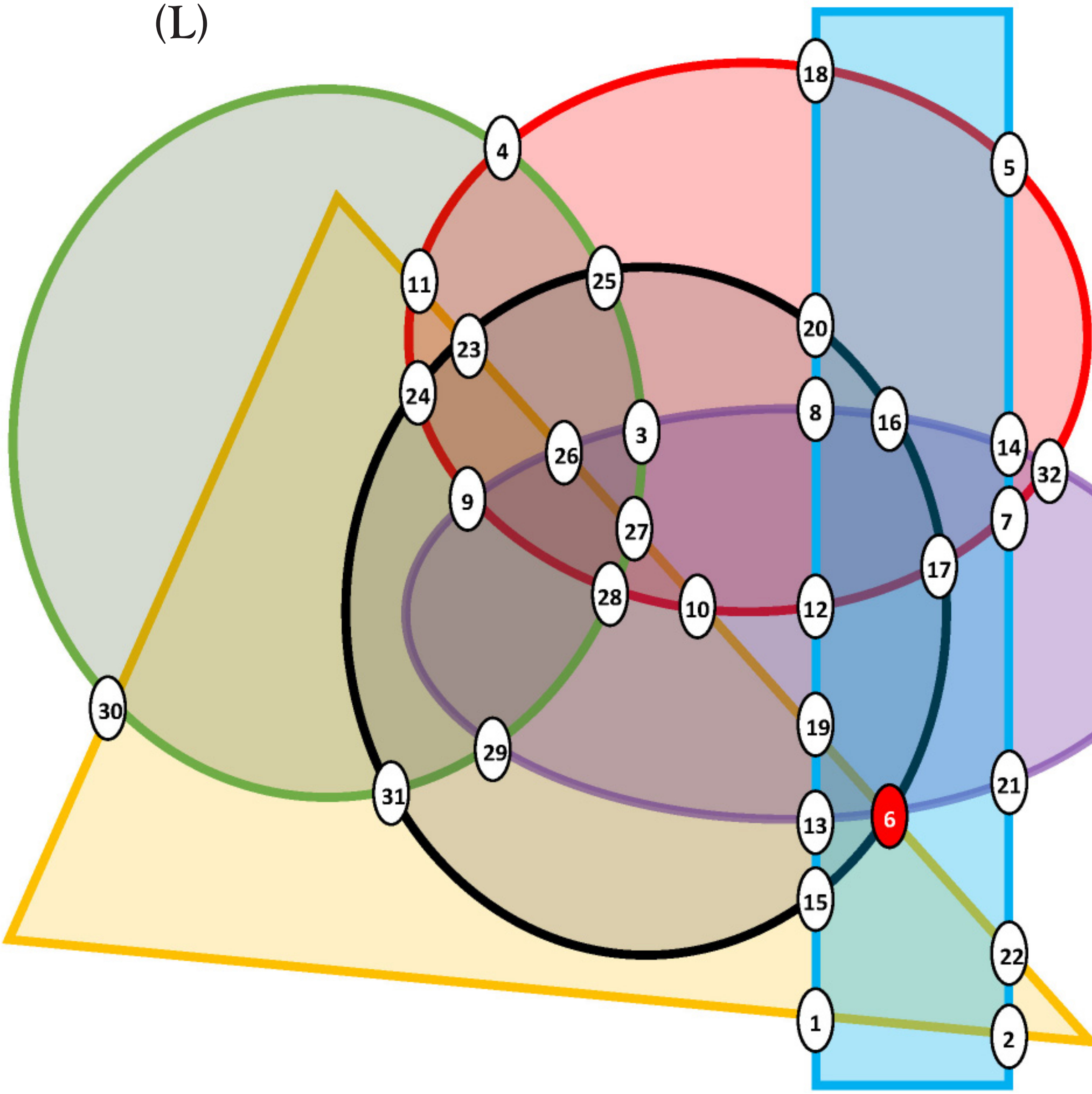
Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene:

Elipse verde (EV) – 177
Elipse roja (ER) – 177
Elipse lila (EL) – 177
Elipse negra (EN) – 177
Rectángulo Azul (RA) – 177
Triangulo Amarillo (TA) – 177

Con estos cambios la nueva suma de los elementos de los contornos de cada una de las seis figuras se tiene (M):

Elipse verde (EV) – 181
Elipse roja (ER) – 181
Elipse lila (EL) – 181

(L)



Elipse negra (EN) – 180
Rectángulo Azul (RA) – 181
Triangulo Amarillo (TA) – 182

Con lo que posemos concluir que en este caso existen MemoRetos para los cinco valores de los elementos operativos posibles.

POR VARIACIONES

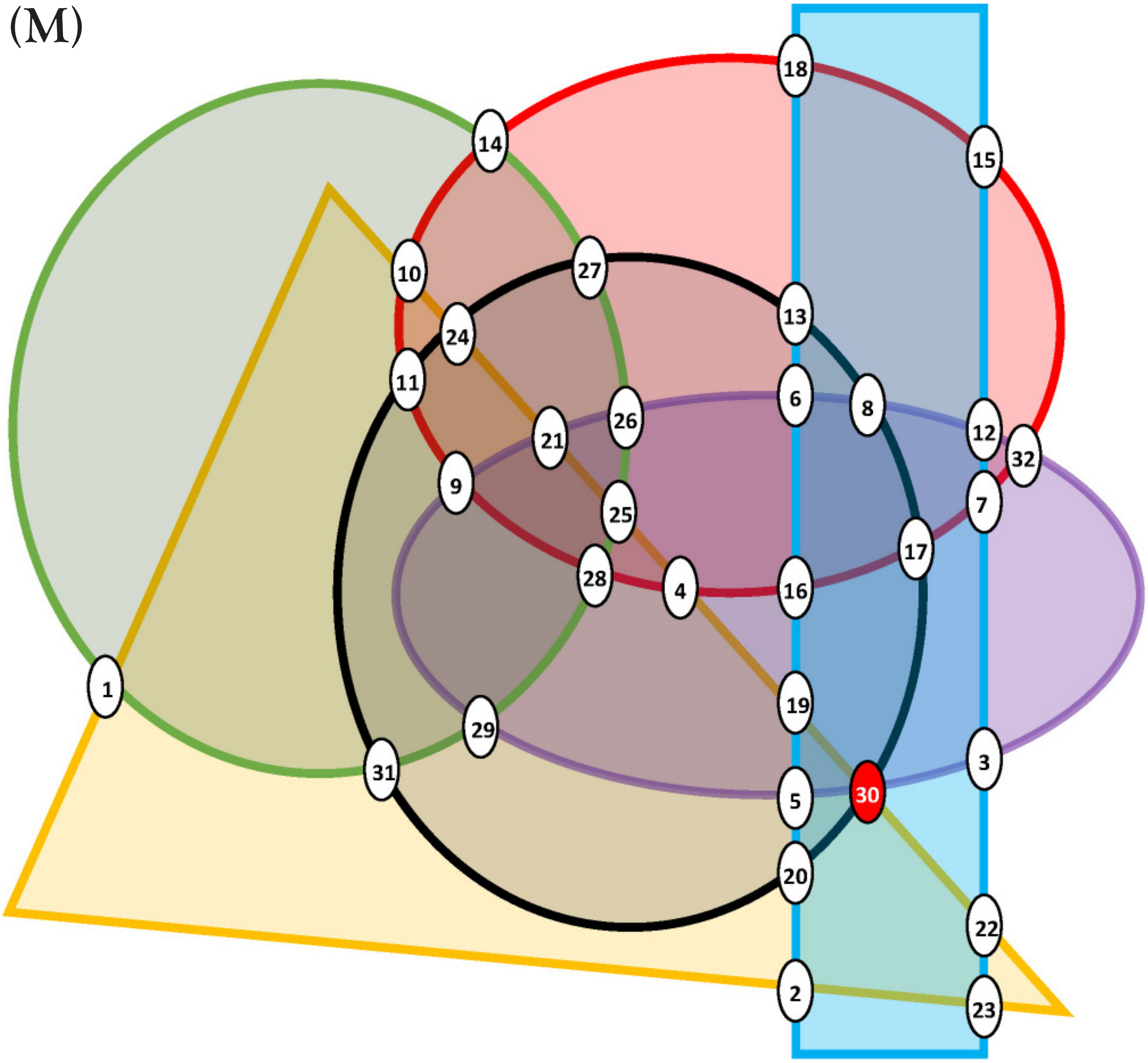
Si se observa la solución del ultimo MemoReto, los números 6, 12, 5 y 3 pertenecen tanto al rectángulo azul (RA) como a la elipse lila (EL) y si movemos estos elementos operativos entre sí, tendremos nuevas soluciones al MemoReto, como son 4 elementos el número posible de soluciones derivadas será 4! = 24.

Pero esto sucede en todas las intersecciones entre las figuras presentes y el total soluciones derivadas será el producto del factorial del número de elementos operativos comunes en cada intersección.

Para el ejemplo, se tiene que:

La cardinalidad de la intersección entre elipse verde y elipse lila es 2 y se represebtará

(M)



- Card(EV ∩ EL) = 2, pero también:
- Card(EV ∩ ER) = 2
- Card(EV ∩ EN) = 2
- Card(EV ∩ RA) =0
- Card(EV ∩ TA) = 2
- Card(EL ∩ ER) = 2
- Card(EL ∩ EN) = 2,

aquí está la intersección triple con el elemento fijo, por tanto en la intersección está solo 1 elemento.

- Card(EL ∩ RA) = 4
- Card(EL ∩ TA) = 1, por lo de la intersección triple.
- Card(ER ∩ EN) = 2
- Card(ER ∩ RA) = 4
- Card(ER ∩ TA) = 2
- Card(EN ∩ RA) = 2
- Card(EN ∩ TA) = 1, por lo de la triple intersección.
- Card(RA ∩ TA) = 4.

Por tanto el número de variaciones para cualquier solución de este MemoReto es

2!x2!x2!x0!x2!x2!x1!x4!x1!x2!x4!x2!x2!x1!x4!
= $(2!)^8$x0!x$(1!)^3$x$(4!)^3$
= $(2)^8$x1x$(1)^3$x$(24)^3$
= 256x1x1x13824
= 3 538 944

Soluciones por posibles por cada valor de equilibrio.

Consecuentemente como existen cinco valores de equilibrio.

Este MemoReto tiene al menos 17 694 720 soluciones posibles.

Número que siendo un número grande representa un porcentaje muy bajo de todos los posibles arreglos que podrían hacerse con los 32 elementos operativos (32!).

IV. Conclusiones

Este método comparándolo con otros procedimientos para resolver los MemoRetos que demandan de mayor tiempo y recursos [4].

Este método permite entender mejor los MemoRetos y la interacción de los números.

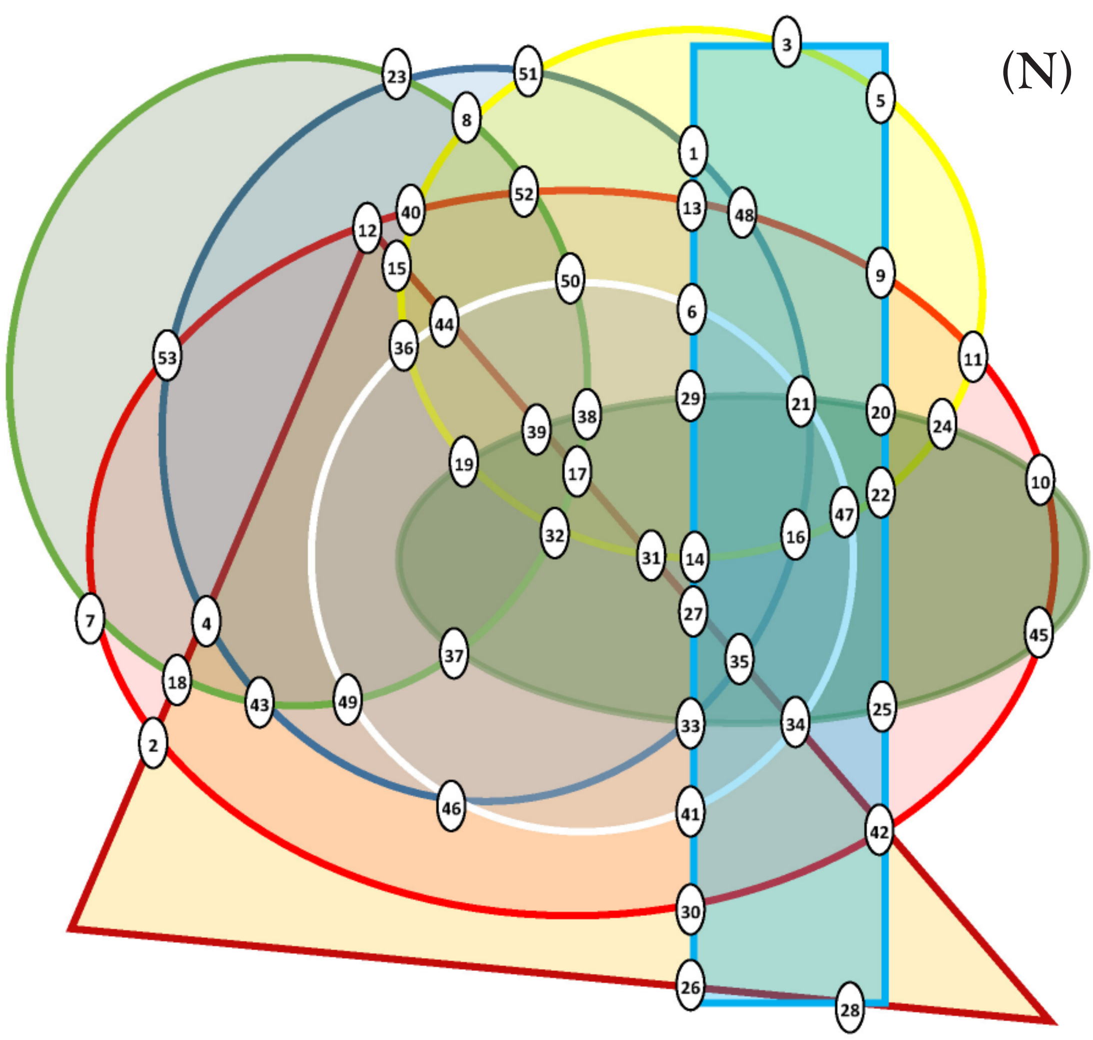
Este método que se basa en la deducción lógica [5][6] aún no ha sido sistematizado y supera en efectividad a los algoritmos existentes [7][8].

Este método ayuda a resolver MemoRetos de cualquier orden.

Para concluir se presenta aquí un MemoReto de ocho figuras, 53 elementos operativos y 3 puntos de intersección triple que ha sido resuelto con este método.

MEMORETO: Se han dibujado un rectángulo, un triángulo y seis elipses, tal como se observa en la figura, generando cincuenta y tres puntos de intersección, se pide ubicar en cada corte un número entero del uno al cincuenta y tres, sin repetición, de tal forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea el mismo. (N)

(N)



Referencias

[1] G. Agra, N. Formiga, P. Oliveira, M. Costa, M. Fernandes y M. Nóbrega, Analysis of the concept of Meaningful Learning in light of the Ausubel's Theory. *Rev Bras Enferm, 72*(1), 248-55. 2019. http://dx.doi.org/10.1590/0034-7167-2017-0691

[2] M. Vasquez, D. Mendoza, C. Vasquez, Memoretos Propuesta Pedafógica para Enseñar Matemáticas, CCE – Ecuador, Azogues. 2021.

[3] J. Cai, S. Hwang, V. Robison, Journal for Research in Mathematics Education: Practical Guides for Promoting and Disseminating Significant Research in Mathematics Education. In: Kaiser G., Presmeg N. (eds) Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham, 2019.

[4] Y. Colliver y N. Veraksa, Contribuciones de Vygotsky a la comprensión del desarrollo emocional a través del juego en la primera infancia. *Early Child Development and Care*, 191(4), 1-20. 2021.

[5] Y. Hayal & C. Meral. Development of an attitude-towards-using-mathematics scale for high-school students and an analysis of student attitudes, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51:1, 3-25, 2020. DOI: 10.1080/0020739X.2019.1679398

[6] S. Newman y A. Latifi, Vygotsky, educación y formación de profesores. *Journal of Education for Teaching, 47*(1), 4-17, 2021.

[7] T. Shreiner & B. Dykes, B. Visualizando la enseñanza de visualizaciones de datos en estudios sociales: un estudio de las prácticas, creencias y conocimientos de alfabetización de datos de los maestros. Teoría e Investigación en Educación Social, 49(2), 262-306. 2021.

[8] S. Zelbo, The recreational mathematics activities of ordinary nineteenth century Americans: A case study of two mathematics puzzle columns and their contributors, British Journal for the History of Mathematics, 34:3, 155-178, 2019. DOI: 10.1080/26375451.2019.1646522