MODELO TEÓRICO POLINOMIAL SOBRE LA TRAYECTORIA DE DESVIACIÓN ENTRE VÍAS FÉRREAS PARALELAS

Polynomial theoretical model on the deviation trajectory between railways

CARLOS M. MATA RODRÍGUEZ[1]

Recibido:23 de abril de 2023. Aceptado:28 de octubre de 2023
DOI: http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2024.v11.n21.a159

Resumen

Al proyectar las curvas de un ferrocarril, y debido a la gran velocidad de los trenes, no conviene pasar bruscamente de la vía recta a una curva circular. A fin de hacer gradual el cambio de curvatura, los ingenieros se sirven de curvas de transición para unir la parte recta de una vía con la parte que es un arco circular. Tal curva debe tener curvatura cero en su punto de unión con la vía recta, y la curvatura de la vía circular donde se une con esta. Por lo general se emplean arcos de parábolas cúbicas como curvas de transición.

Palabras clave: curvatura, curvas de transición, ferrocarriles, polinomios.

Abstract

In laying out the curve on a railroad it will not do, on account of the high speed of trains, to pass abruptly from a straight stretch of track to a circular curve. In order to make the change of curvature gradual, engineers make use of transition curves to connect the part of a track with a circular track. This curve should have zero curvature at its point of junction with the straight track and the circular track where it joins the latter. Ares cubical parabolas are generally employed as transition curves.

Keywords: curvature, polynomial, railroad, transition curves.

I. Introducción

Los trenes circulan guiados por los raíles, por lo que siempre se encuentran sobre una misma vía. Una característica que permite que el convoy ferroviario, sin importar su número, siga exactamente el mismo camino. Sin embargo, en algunos momentos los trenes deben cambiar la vía por la que circulan, es aquí donde se define el concepto de curva de transición de radio variable, que posibilita el enlace entre una recta y una curva circular o entre dos curvas circulares de diferentes radios permitiendo contrarrestar los efectos de la fuerza centrífuga dentro de parámetros permisibles[1].

El objetivo del presente artículo reside en proponer un modelo teórico de vía de enlace entre dos vías paralelas como se muestra en la Fig. 1, mediante el empleo de un polinomio de quinto grado. En los primeros ferrocarriles, debido a las bajas velocidades y los grandes radios[2] utilizados en curvas hicieron posible que se ignorara cualquier tipo de transición entre curva y recta. Es a partir del siglo XIX cuando los incrementos de

1 Licenciado en Educación, especialidad en Matemáticas. Profesor Asistente de la Universidad de Ciego de Ávila, Cuba. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0734-2612 Correo electrónico: cmatas1010@gmail.com

Fig. 1. Vías férreas.

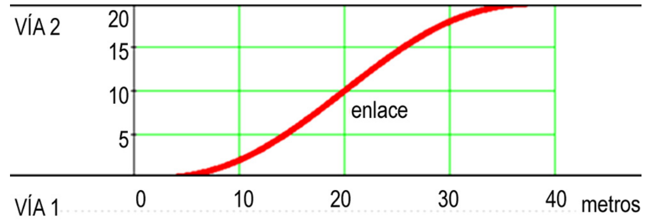

Fig. 2. Vía de enlace.

velocidad determinan la necesidad de curvas que cambien gradualmente su curvatura. En 1862 el ingeniero civil escocés William John Rankine propone una técnica, más tarde conocida como el método de Rankine con el diseño de una curva cúbica, o polinómica de grado 3, para la transición entre curva y recta.

Este tipo de desvío recibe el nombre de escape o diagonal, y está formado por dos desvíos sencillos, colocados sobre vías contiguas en sentido opuesto y de tal forma que sus vías desviadas se encuentran en prolongación una de otra. La propuesta gráfica se muestra en la Fig. 2.

II. Fundamentación teórica

Una trayectoria de desviación entre las vías férreas paralelas 1 y 2 como se muestra en la Fig. 2, proporciona un cruce "razonablemente suave". Ella debe dejar la vía 1 tangencialmente, para evitar una curva fuerte allí, y unirse a la vía 2 en un punto a 40 metros de distancia al este y 20 metros al norte, de nuevo tangencialmente.

Una curva polinómica de quinto grado proporciona un cruce que se denomina discontinuidad en la curvatura de ambos extremos, siendo ambas vías paralelas (el polinomio de tercer grado presenta deficiencias básicamente en los puntos de enlace, provocando mayor grado de curvatura, esto quedo demostrado al realizar un análisis de su curvatura[2]). El problema fundamental consiste en evitar que, al entrar el convoy ferroviario en la vía de enlace, a una determinada velocidad (en nuestro modelo 15kph) dicho cambio no sea percibido por los pasajeros, particularmente en los puntos de conexión. Normalmente los trenes tienen que reducir la velocidad para entrar en una vía desviada, mientras que pueden continuar a la misma velocidad por la vía principal.[3] El mayor inconveniente que plantea el desvío es la velocidad que tiene el convoy al entrar en la vía de enlace. En el artículo sugerimos que la transición se puede realizar mediante el uso de un polinomio de quinto grado que se ajusta a las exigencias del modelo, como el que se propone experimentalmente.

$$P(x) = 1.17 \times 10^{-6} x^5 - 1.17 \times 10^{-4} x^4 + 3.118 \times 10^{-3} x^3 + 1.115 \times 10^{-4} x^2 - 5.589 \times 10^{-4} x - 7.668 \times 10^{-4}$$

Con auxilio de AutoCAD[4] fue creado el modelo digital del terreno y dentro de este la proyección en planta y perfil, así como las secciones transversales para determinar el polinomio P(x), partiendo de un levantamiento topográfico[5], el cual se encuentra tabulado en la tabla I, donde la primera columna son los puntos en las abscisas y la segunda columna las ordenadas correspondientes, llevado a un sistema de coordenadas cartesianas, estableciendo la unidad de medida en metros.

Para la determinación del polinomio se utilizó la aplicación Data Analysis Polynomial Regression implementada en MathCAD[6].

La representación gráfica del polinomio P(x) se muestra en la Fig. 3.

2 Cuanto mayor sea el radio, tanto menor será la curvatura.

Tabla I. Abscisas y Ordenadas.

Abscisas	Ordenadas
0.000	0.00
2.000	0.02
4.000	0.17
6.000	0.53
8.000	1.16
10.000	2.07
12.000	3.26
14.000	4.70
16.000	6.35
18.000	8.14
20.000	10.00
22.000	11.86
24.000	13.65
26.000	15.30
28.000	16.74
30.000	17.93
32.000	18.84
34.000	19.47
36.000	19.83
38.000	19.97
40.000	20.00

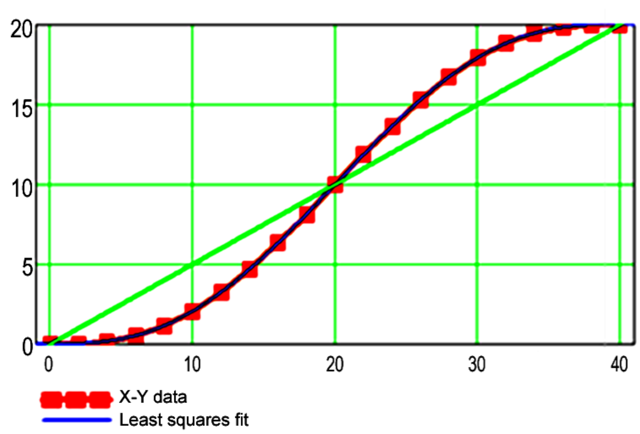

Fig. 3. Polinomio de regresión.

III. Cálculos

Para determinar la objetividad de la teoría.

A. Determinación de los puntos de inflexión en el intervalo[0,40]

Calculando la segunda derivada del polinomio P(x) e igualando a cero obtenemos:[7]

$$\frac{d^2}{dx^2}P(x) \rightarrow 0.018708x - 0.001404x^2 + 0.0000234x^3 + 0.000223$$

$$\frac{d^2}{dx^2}P(x) \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 19.998 \\ 40.013 \\ 0.0119 \end{pmatrix}$$

Esto es en (0,0), (20,10) y (40,20), están presentes los puntos de inflexión y en ellos el valor de la curvatura (como quedará demostrado) tiende a cero.

B. Análisis de la curvatura

Es esencial que, en los puntos extremos del enlace y su punto medio, la curvatura tienda a cero, para demostrar este importante aspecto, utilizamos la fórmula para determinar la curvatura de una curva, tomada del Cálculo infinitesimal.

$$K(x) = \left| \frac{\frac{d^2}{dx^2}P(x)}{\left[1 + \left(\frac{d}{dx}P(x)\right)^2\right]^{1.5}} \right|$$

En la tabla II se muestran los valores de la curvatura con un espaciamiento de 4 metros, (Fig. 4) el correspondiente radio (en metros) y el peralte[3] (en cm) para una velocidad de 15 km/h equivalente a 4.167 m/seg. (Fig. 5)

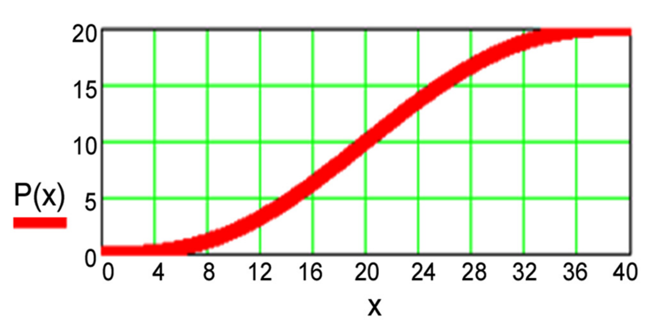

Fig. 4. Enlace.

3 Elevación del carril exterior en curva con respecto al interior para compensar la fuerza centrífuga. El peralte en una curva depende de la velocidad de los trenes y el radio de curvatura.

Tabla II. Valores de la curvatura.

	"abscisa"	"curvatura"	"radio"	"peralte"	"o-grados"
	0.000	0.000	4484.307	0.057	0.023
	4.000	0.053	18.899	13.463	5.360
	8.000	0.059	17.073	14.904	5.929
	12.000	0.037	27.376	9.294	3.706
calculo(15) =	16.000	0.016	64.169	3.965	1.583
	20.000	0.000	151498.893	0.002	0.001
	24.000	0.016	64.096	3.970	1.585
	28.000	0.037	27.351	9.303	3.709
	32.000	0.059	17.058	14.917	5.935
	36.000	0.053	18.884	13.474	5.364
	40.000	0.000	3891.060	0.065	0.026

El programa para el cómputo de la tabla diseñado en MathCAD se muestra a continuación el cual tiene por nombre: calculo(v), donde v representa la velocidad en kp/h. Ancho de vía: (Trocha) 1.435 metros.

$$
\begin{aligned}
\text{cálculo}(v) = \; & k_{1,1} \leftarrow \text{"abscisa"} \\
& k_{1,2} \leftarrow \text{"curvatura"} \\
& k_{1,3} \leftarrow \text{"radio"} \\
& k_{1,4} \leftarrow \text{"peralte"} \\
& k_{1,5} \leftarrow \text{"}\alpha\text{-grados"} \\
& g \leftarrow 9.807 \\
& z \leftarrow 2 \\
& \text{for } x \in 0, 4 .. 40 \\
& \quad curv \leftarrow \left| \frac{\frac{d^2}{dx^2} P(x)}{\left[1 + \left(\frac{d}{dx} P(x) \right)^2 \right]^{1.5}} \right| \\
& \quad RADIO \leftarrow \frac{1}{curv} \\
& \quad \alpha \leftarrow \operatorname{atan}\left[\frac{(v0.278)^2}{g\,RADIO} \right] \\
& \quad peralte \leftarrow 1.435 \tan(\alpha)\, 100 \\
& \quad k_{z,1} \leftarrow x \\
& \quad k_{z,2} \leftarrow curv \\
& \quad k_{z,3} \leftarrow RADIO \\
& \quad k_{z,4} \leftarrow peralte \\
& \quad k_{z,5} \leftarrow \alpha \frac{180}{\pi} \\
& \quad z \leftarrow z + 1 \\
& k
\end{aligned}
$$

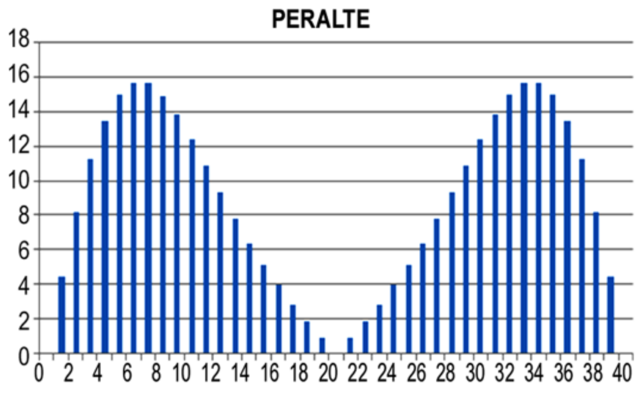

Fig. 5. Esquema de peraltes.

Longitud del enlace

Tomando del Cálculo infinitesimal la fórmula que nos permite determinar la longitud de una curva, la aplicamos al polinomio representativo P(x) en el intervalo[0,40].

$$L = \int_0^{40} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} P(x)\right)^2}\, dx = 46.28$$

Siendo su longitud de 46.28 metros, necesitando, de este modo, un total de 107 traviesas. (3 traviesas en 1.30 metros)

IV. Conclusiones

Con el análisis desarrollado, se puede inferir que estamos en condiciones de proponer el modelo experimental, a las exigencias de la ingeniería civil, pues el mismo consta de los cálculos matemáticos básicos que permiten llevar a ejecución el proyecto teórico de la vía de enlace[8].

V. Referencias

[1] J. A. Guerrero Fernández: "Ingeniería de vías férreas", México, LIMUSA, 2017.

[2] P. M. Merino: "Cálculo diferencial". La Habana, Cultural S,A. 1961.

[3] A. García Álvarez: "Dinámica de los trenes de alta velocidad", Madrid: Fundación de los ferrocarriles españoles, 2010.

[4] G. Omura: "AutoCAD 2005", Madrid, Anaya, 2004.

[5] F. Domínguez García Tejero: "Topografía general y aplicada", Ediciones Mundiprensa, Madrid, 1998.

[6] Parametric Technology Corporation, "MathCAD", version 14.0.0.163, USA, 2007.

[7] Thomas/Finney, "Calculus and Analytic Geome try", ADDISON WESLEY PUBLISHING, New York, 2007.

[8] Colectivo de Autores: "Trocha 1435. Los ferrocarriles en Cuba". La Habana. Ciencias Sociales, 2010.