





ISSN: 2339-3270

Revista  
INGENIERÍA, MATEMÁTICAS  
Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

PUBLICACIÓN DEL CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REPUBLICANA



VOLUMEN 1 - NÚMERO 1 DE 2014

Revista de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información, es una publicación del Centro de Investigaciones de la Corporación Universitaria Republicana - Bogotá, D.C.

Los artículos publicados en la revista pueden ser reproducidos total o parcialmente, citando la fuente y el autor.

Enfoque o perspectiva de análisis y contenido de los artículos son responsabilidad de los autores.

**DIRECTIVOS**  
**CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REPUBLICANA**

Presidenta del Consejo Superior : Diana Josefina Téllez Fandiño  
Rector : Gustavo Adolfo Téllez Fandiño  
Vicerrector : Gerardino Vivas Hernández  
Jefe de Planeación : Juan Manuel Medina  
Director del Centro de Investigaciones : Rodrigo Alberto Plazas Estepa  
Decano Facultad de Derecho  
y Ciencias Políticas : Iván Alfonso Cancino González  
Decana Facultad de Contaduría : María Cecilia Galindo de Galindo  
Decana Facultad de Trabajo Social : Jazmin Alvarado González  
Decano Facultad de Finanzas  
y Comercio Internacional : Tatiana Villarreal Cerquera  
Decano Facultad de Ingenierías : Ramón María Cubaque Mendoza  
Decano Facultad de Ciencias Básicas : Héctor Guillermo Sierra

**EDITOR**  
**Héctor Guillermo Sierra**

**COMITÉ EDITORIAL**

Magdalena Pradilla Rueda  
Tatiana Ferro Mojica  
Alexander Bonilla Rivera  
Nelly Paola Palma Vanegas  
Raúl Manuel Falcón Ganfornina

**COMITÉ CIENTÍFICO**

Gustavo Adolfo Téllez Fandiño  
Evelyn Garnica  
Jesús Victorio Martín  
Alffer Gustavo Hernández Posada  
Ramón Cubaque

Publicación semestral  
Número de ejemplares: 500  
ISSN: 2339-3270

**Información:**

Centro de Investigaciones  
Carrera. 7 No 19-38 • PBX: 286 23 84 Ext. 114

**Armada digital e impresión:**  
Grafiweb Impresores Publicistas • Tel.: 6945017  
grafiwebgerencia@gmail.com

## COMITÉ EDITORIAL

### **Magdalena Pradilla Rueda**

Ph. D Universidad de Paris I. Pantheon-Sorbonne. Faculté de Philosophie.  
Ph. D Université Grenoble II Informatique et Mathématiques en Sciences Sociales.  
Magister en Philosophie Universidad Javeriana.

### **Tatiana Ferro Mojica**

Magister en Dirección y Gestión de Empresas Internacionales Universidad Autónoma de Barcelona. Especialista en Gerencia Empresarial Universidad Central.

### **Alexander Bonilla Rivera**

Magister en Astrofísica, Universidad de Valparaíso, Chile. Licenciado en Física, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

### **Nelly Paola Palma Vanegas**

Doctora en Matemáticas Universidad Nacional de Colombia; Magister en Matemáticas Universidad Nacional de Colombia.

### **Raúl Manuel Falcón Ganfornina**

Doctor en Matemáticas Universidad de Sevilla, Matemático de la Universidad de Sevilla.

## COMITÉ CIENTÍFICO

### **Gustavo Adolfo Téllez Fandiño**

Doctor en Derecho. Rector Corporación Universitaria Republicana.

### **Evelyn Garnica**

Maestría en Dirección de Proyectos Universidad Villa del Mar. Especialista en Planeación Desarrollo y Administración de la Investigación Universidad Manuela Beltrán. Ingeniera de Diseño y Automatización Electrónica Universidad de la Salle.

### **Jesús Victorio Martín**

Magister en Ingeniería de Software Universidad de Alcalá. Ingeniero en Informática de Gestión Universidad de Sevilla.

### **Alffer Gustavo Hernández Posada**

Maestría en curso en Ciencias- Matemáticas Universidad Nacional de Colombia. Especialización en matemática avanzadas Universidad del Tolima Licenciado en Matemáticas Universidad del Tolima. Especialista en Finanzas Universidad de Ibagué-Universidad del Rosario.

### **Ramón Cubaque**

Magister en Educación Universidad Libre de Colombia. Especialista en Gerencia y Proyección Social de la educación Universidad Libre de Colombia.

## PARES EVALUADORES

### **Darío Alejandro García**

Magister en Matemáticas, Universidad de los Andes. Doctorando en Matemáticas Universidad de los Andes.

### **Adriana Díaz**

Magister en Docencia, Universidad de la Salle. Ingeniera Industrial Universidad Libre de Colombia.

### **Guillermo Enrique Montes**

Especialista en Auditoría de Sistemas Universidad Antonio Nariño. Especialista en Gerencia de Producción Universidad Antonio Nariño. Ingeniero Industrial Universidad Incca de Colombia.

### **José Alejandro Franco Calderón**

Especialista en Administración de Tecnologías de la Información para la Comunicación Virtual, Universidad Manuela Beltrán. Ingeniero Electrónico, Escuela Colombiana de ingeniería «Julio Garavito».

### **Isaías David Marín Gaviria**

Estudiante de Maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. Matemático, Universidad Nacional de Colombia.

### **Jhon Alexander Rico Franco**

Especialista en seguridad en Redes de la Universidad Católica de Colombia. Ingeniero de sistemas de la Universidad Católica de Colombia.

### **Bricce Yesid Valencia Cruz**

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Especialización en Matemática Aplicada. Universidad Sergio Arboleda.

## PERFIL DE LA REVISTA

### AFINES A INGENIERÍA DE SISTEMAS, INDUSTRIAL, MATEMÁTICAS Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

#### Requisitos de Publicación

Las directivas de la Corporación Universitaria Republicana y el Centro de Investigaciones invitan a investigadores nacionales e internacionales a participar con sus artículos en las próximas publicaciones de la Revista de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información.

Los artículos deben ser inéditos, productos de proyectos de investigación preferiblemente terminados; en temas relacionados con Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Industrial, Matemáticas y Ciencias de la Información.

Para su recepción, evaluación y publicación los artículos deberán cumplir con lo siguiente:

#### 1. Componentes:

1. Resumen en español.
2. Palabras clave.
3. Abstract.
4. Key-words.
5. Introducción.
6. Problema de investigación.
7. Hipótesis de trabajo.
8. Estrategia metodológica.
9. Resultados.
10. Conclusiones.
11. Bibliografía.

2. Los artículos deberán tener un sustento bibliográfico. Las referencias bibliográficas tienen que hacerse de acuerdo con las normas nacionales e internacionales actualmente utilizadas en este tipo de publicaciones (ICONTEC-APA).

3. En la primera página se debe hacer la correspondiente referencia a pie de página sobre el autor y sus calidades académicas e investigativas. Igualmente señalar el proyecto de investigación del cual procede el artículo y la institución que financia dicho proyecto.

4. Extensión máxima de 20 páginas, presentación en Word. Papel carta, letra Arial 12 a espacio y medio.

La revista podrá publicar artículos que cumplan con los requisitos de forma y contenido y que hayan sido evaluados favorablemente por árbitro o par académico externo.

Los artículos podrán remitirse en medio físico a la sede administrativa de la Corporación Universitaria Republicana, Centro de Investigaciones (Carrera 7° No. 19-39, Piso 4°. Teléfono 2862384 Ext. 114) o a los correos: rodrigoplazas@urepublicana.edu.co

# CONTENIDO

	Pág.
<b>Editorial</b>	
<i>Héctor Guillermo Sierra</i> .....	11
 <b>Artículos de Investigación</b>	
El túnel carpiano: Riesgo ergonómico en trabajadoras de cultivo de flores <i>Aldo E. Piñeda Geraldo</i> .....	15
Algoritmos Genéticos en la Solución de Ecuaciones Diofánticas Lineales <i>Cristian C. Forero</i> .....	25
Robots. Herramientas para las aulas de clase <i>Evelyn Garnica Estrada</i> .....	33
Despliegue de una aplicación interactiva bajo el estándar DVB-T y su impacto en la red de radiodifusión y retorno <i>José Alejandro Franco Calderón</i> .....	47
Teorema de clasificación para 2-variedades <i>Leonardo Solanilla, Óscar Palacio, Gustavo Hernández</i> .....	65
Estado del arte de la (in)seguridad VoIP <i>John Alexander Rico Franco</i> .....	79
Contexto y elementos de una sintaxis del lenguaje lógico <i>Magdalena Pradilla Rueda</i> .....	101
Teorema de la división de Lemniscata <i>Leonardo Solanilla, Óscar Palacio, Uriel Hernández</i> .....	125



# EDITORIAL

Esta revista brinda una importante opción de divulgación siendo el medio para impulsar la difusión social del conocimiento científico y tecnológico. Así se permite informar los resultados alcanzados por docentes e investigadores de los diferentes grupos de investigación de la universidad y la región.

Se destacan artículos por la calidad de sus contenidos y la responsabilidad de sus autores en el proceso de difusión. En esta primera edición se hace entrega de lo más significativo de la producción académica, dando nuestros primeros pasos hacia el proceso de indexación, y demostrando que el esfuerzo y la dedicación tienen su recompensa.

Los resultados de investigación tanto de la Facultad de Ingeniería como de la Facultad de Ciencias Básicas-FCB tienen este valioso medio para dar a conocer los avances tecnológicos y científicos producto del trabajo coordinado entre investigadores, docentes y estudiantes. En particular la Corporación Universitaria Republicana tiene la Facultad de Ciencias Básicas-FCB como una dependencia académico-administrativa que cumple con las básicas de Investigación, Docencia, Extensión Científica y Cultural, Asesoría Docente e Investigación y Servicios a la Comunidad; La FCB está definida como un espacio académico-administrativo de la Corporación, cuya misión es formar en Ciencias Naturales, Ciencias Matemáticas con el apoyo de las Ciencias de la Información y la Comunicación, por tanto la revista es la herramienta y medio de apoyo no solo para divulgar resultados, sino para utilizarse como material de apoyo para los procesos pedagógicos de enseñanza y aprendizaje.

Éste número de la revista presenta trabajos realizados por miembros de la comunidad académica e investigativa, entre ellos se seleccionaron y evaluaron los siguientes: el profesor Leonardo Solanilla Palacio, da a conocer los resultados del trabajo de investigación *Teorema de clasificación para 2-variedades* sobre métodos combinatorios que permitan la construcción de superficies compactas, esto con el fin de entender las mismas y así poder dar una demostración completa del teorema de clasificación topológica de superficies.

El profesor Jhon Alexander Rico Franco, presenta resultados valiosos sobre el estudio del *Estado del arte de la (in)seguridad VoIP* en que se destaca la telefonía basada en el protocolo IP (VoIP) como el concepto tecnológico que comprende a todos los mecanismos necesarios para lograr realizar llamadas telefónicas y/o sesiones de videoconferencia a través de redes de datos, permitiendo servicios de telefonía a costos mínimos y de fácil implementación e integración con la red de datos propia de cualquier empresa; y es por estas características que los productos VoIP han tenido una muy rápida y amplia aceptación en todo rango de empresas, uso doméstico y otros ambientes que requieren de soluciones de telefonía.

La Dra. Magdalena Pradilla Rueda presenta resultados del estudio sobre *Contexto y elementos de una sintaxis del lenguaje lógico*, análisis del lenguaje, realizados por los lógicos de principios del siglo XX, dentro del desarrollo de la Lógica Matemática, sientan las bases de la estructuración de un Lenguaje Lógica. Uno de los ejes principales es la sintaxis, que determina el funcionamiento del lenguaje, a partir de la deducción formalizada, como la herramienta lógica más importante, la definición de las formas de anotación y las relaciones entre diferente lenguajes.

El Ing. Cristian C. Forero, muestra el desarrollo del estudio sobre *Algoritmos Genéticos en la Solución de Ecuaciones Diofánticas Lineales* con dos incógnitas y como múltiples problemas de diversos campos de la ciencia pueden solucionarse a través de estas ecuaciones.

La ingeniera Evelyn Garnica, quien trabaja el proyecto *Robots. Herramientas para las aulas de clase*, expone la propuesta de aplicación de un producto que se ha venido desarrollando en la Corporación Universitaria Republicana denominado Plataformas Robóticas Multifunción, que consiste en robots programables basados en guías de aprendizaje que son desarrolladas en las aulas de clase con el fin de dinamizar la formación en asignaturas propias del programa de ingeniería de sistemas de la Universidad; donde se hace necesario que el aprendizaje de conceptos teóricos en algunas asignaturas se vea aplicado sobre entornos reales, para que sea más comprensible para los estudiantes.

El docente José Alejandro Franco Calderón, presenta la síntesis del trabajo adelantado el cual está relacionado con el *Despliegue de una aplicación interactiva bajo el estándar DVB-T y su impacto en la red de radiodifusión y retorno*, en él se socializa de una manera clara los resultados de investigación obtenidos al desarrollar un contenido interactivo para

televisión digital terrestre, y bajo la norma DVB-T desarrollado con el estándar de programación MHP, este contenido converge con otros sistemas como las plataformas web y los dispositivos móviles, adoptando una metodología de desarrollo de software tradicional donde se divide el proyecto en análisis, planeación, ejecución implementación y despliegue.

El profesor Aldo E. Piñeda Geraldo, presenta el resultado de las etapas del proyecto de investigación titulado: *El túnel carpiano: Riesgo ergonómico en trabajadoras de cultivo de flores*, muestra la patología y su asociación con agentes de riesgos ergonómicos de la enfermedad y como para contribuir a reducir los riesgos e incrementar las acciones y la cultura de la prevención contra el síndrome del túnel carpiano.

Finalmente los profesores Leonardo Solanilla, Oscar Palacio y Uriel Hernández presentan el artículo titulado el *Teorema de la División de Lemniscata*, sin la ayuda de la teoría de las funciones elípticas y sin referencia alguna a la moderna teoría de los campos, los ingredientes esenciales a la demostración son las funciones lemniscátucas de Gauss y algunas nociones elementales sobre factorización en el anillo de los polinomios que tienen coeficientes racionales. presentan que el procedimiento es muy poderoso y prueban que la construcción geométrica es posible y las operaciones algebraicas que realizan la construcción.

Con esta contribución de las Facultades de Ingeniería y Ciencias Básicas como parte dinámica de comunidad académica y científica de la Corporación, esperan seguir consolidando la estrategia de divulgación de hacer más explícitos y visibles los resultados de investigación.

**Héctor Guillermo Sierra**

Decano Facultad de Ciencias Básicas



# EL TÚNEL CARPIANO: *Riesgo ergonómico en trabajadoras de cultivo de flores\**

ALDO E. PIÑEDA GERALDO\*\*

*Recibido: 4 de junio de 2013 / Aceptado: 30 de julio de 2013*

## RESUMEN

El presente artículo es el resultado de la segunda etapa del proyecto de investigación titulado: factores de riesgo relacionados con el síndrome del túnel carpiano de origen ocupacional en trabajadores del sector floricultor de la sabana de Bogotá. Inicialmente se realizó una revisión de fuentes secundarias sobre esta patología y su asociación con agentes de riesgos ergonómicos. El objetivo fue analizar factores de riesgo en un grupo de trabajadoras en un cultivo de flores de la sabana de Bogotá. Así mismo, se observaron e identificaron los factores ergonómicos para contribuir a reducir esta enfermedad e incrementar las acciones y la cultura de la prevención contra el síndrome del túnel carpiano. El estudio fue exploratorio-descriptivo transversal. La muestra estuvo compuesta por 10 trabajadoras adultas, todas del género femenino, seleccionadas por un muestreo aleatorio simple. Para la recopilación de los datos, se realizaron observaciones directas, entrevistas y encuestas. Los factores más sobresalientes del estudio fueron las posturas inadecuadas, movimientos repetitivos, el uso excesivo de las manos.

**Palabras clave:** túnel carpiano, riesgo ergonómico, trabajadoras, cultivo de flores.

## ABSTRACT

The following article is the result of the investigation project named: risk factors related with the carpal tunnel syndrome, on the workers of the floriculture sector in the Bogota, sabana. The project began with an investigation relating the secondary causes about this pathology and its association with the ergonomic risks that it could cause. The main goal was to analyze the risk factors in a group of workers on a cultivation of flowers located in the sabana, of Bogota. Along the investigation we observed and identify the ergonomic factors that can reduce this disease and increase the prevention culture against the carpal tunnel syndrome. The study was an explorative cross-sectional study. The Project was based on 10 woman workers, there where no specific reasons for their selection. In order to collect information, there where made direct observations, interviews and surveys. The most important factors that where found relating the causes of the disease where that existed inadequate positions, repetitive movements and the exclusive use of hands.

**Key words:** carpal tunnel, ergonomic risk, workers, cultivation of flowers.

---

\* Artículo corto del grupo de investigación OCA: operaciones, calidad y administración. Dependiente del Centro de Investigaciones y de la Facultad de Ingeniería Industrial. El proyecto fue financiado por la Corporación Universitaria Republicana.

\*\* Coordinador de la línea de investigación ergoantropometría. Antropólogo físico de la Escuela Nacional de Antropología e Historia de México, D.F. Especialista en Ergonomía de la Universidad el Bosque. Docente-Investigador de la Corporación Universitaria Republicana. apineda@docente.urepublicana.edu.co

## INTRODUCCIÓN

El síndrome del túnel carpiano es uno de los principales problemas de salud de los trabajadores, que están asociados con factores de riesgo ergonómicos como son: posturas inadecuadas, movimientos repetitivos, fuerzas, levantamiento de cargas, alternancia de frío y calor, vibraciones y por otra parte están los factores de riesgo psicosociales. En un estudio del Seguro Social (1998) reporta que existe una variación de factores ocupacionales que pueden contribuir a su aparición como pueden ser: mayores demandas de producción, aumento de líneas de ensamble, el establecimiento de cuotas de producción, los programas de incentivos que llevan a un aumento de velocidad, repetición y posturas inadecuadas, mayor demanda de mujeres en la fuerza laboral (mano de obra) y así como el incremento de las actividades con equipos de cómputo (Instituto de Seguro Social, 1998).

En los últimos años se ha incrementado esta enfermedad en Colombia. En un documento de la Corporación Cactus, que realizó un estudio sobre trabajadoras de cultivo de flores, se menciona que los sistemas de producción como el “trabajo de línea», multiplica la exposición a los factores de riesgo (Zamudio, 2006. p. 2). En cuanto a la distribución de enfermedades profesionales según actividad económica, estudios sobre esta enfermedad demuestran que las actividades económicas más afectadas por esta patología fueron: la floricultura con el 32,6%. En efecto, la Entidad Promotora de Salud Coomeva, reporta que en 23.000 trabajadoras(es) de este sector, -durante los años 2001 y 2005- se calificaron un total de 661 síndromes del túnel carpiano, siendo calificadas como enfermedad laboral por las Administradoras de Riesgos Profesionales.

El 76% correspondieron a mujeres, lo cual representa la población laboral de cultivo de flores (Ospino, 2005). La industrialización y la creación de nuevos empleos, que son cada vez más repetitivos en las líneas de trabajo, podría influir en los resultados, sin embargo debemos tener en cuenta que las Empresas Promotoras de Salud, son las más beneficiadas de manera directa en el diagnóstico temprano y por otra parte, la calificación de enfermedades profesionales de origen ocupacional, ya que estas pasarían a ser cubiertas por las ARP (Administradoras de Riesgos laborales). Así mismo el reporte de las primeras será influenciado en la identificación de la enfermedad y los posibles factores de riesgo y sus causas.

Tomando en consideración la problemática planteada, esta investigación pretendió abordar la siguiente pregunta: ¿Por qué se está incrementando el síndrome del túnel carpiano de origen ocupacional en el sector laboral colombiano, específicamente el sector floricultor?, ¿Cuáles son los factores de riesgo

que están ocasionando el incremento de esta patología?, ¿Por qué no se implementan medidas correctivas y preventivas de riesgos profesionales para controlar y disminuir esta patología en las trabajadoras colombianas? El objetivo de este estudio identifica algunos factores de riesgo ergonómico que inciden en un grupo de trabajadoras de la sabana de Bogotá. Y por otra parte, observar e identificar los factores de riesgo ergonómico de las trabajadoras en cada puesto de trabajo y contribuir a proteger la salud de las trabajadoras, reduciendo la exposición a riesgos ergonómicos e incrementando las acciones y la cultura de la prevención contra el síndrome del túnel carpiano.

## SÍNDROME DEL TÚNEL CARPIANO

El síndrome del túnel carpiano se origina por la compresión del nervio mediano en el túnel carpiano de la muñeca, por el que pasa el nervio mediano, los tendones flexores de los dedos y los vasos sanguíneos. Si se inflama la vaina del tendón se reduce la abertura del túnel presionando el nervio mediano (Cilveti & Idoate, 2000). Por otra parte, su presentación es facilitada por las características anatómicas del túnel carpiano, donde el mediano puede ser afectado por cualquier condición que aumente de volumen las estructuras dentro del túnel o se estreche el tamaño de la envoltura exterior (Instituto del Seguro Social, 1998). Una definición relacionada de origen ocupacional según el Instituto de Biomecánica de Valencia, dice: compresión del nervio mediano en la muñeca, a su paso por un estrecho canal óseo, debida a trabajos repetitivos que exigen fuerza en una postura incómoda o por utilización de herramientas vibrátiles (Instituto de Biomecánica de Valencia, 1996).

Por otro lado, Gossel (2001) señala que el túnel carpiano se manifiesta por distintas condiciones, por ejemplo: lesiones por movimientos y esfuerzos repetitivos, patologías por traumas acumuladas, síndrome de uso exagerado, síndromes de dolor crónico de las extremidades superiores o patologías por compresión del nervio (Gossel, 2001). A pesar de los vacíos en el conocimiento de los mecanismos precisos que inducen las lesiones del nervio del túnel carpiano, existe un consenso general que su origen es multifactorial, siendo la resultante de una interacción de diversos factores: anatómicos, fisiológicos, mecánicos, individuales y psicosociales (Instituto de Biomecánica de Valencia, 1996). Al respecto Ramírez, Escobar y De Subiría (2008) nos describen lo siguiente:

Las características que posee el síndrome del túnel carpiano, al igual que los otros desórdenes musculoesqueléticos, de tener una etiología multifactorial hace difícil atribuir su presentación a factores exclusivamente laborales, causalidad que en Colombia es condición legal para poder definir derechos

prestacionales en el esquema vigente de seguridad social. Por ello, a través de estudios contratados por el Ministerio de la Protección Social, se ha buscado definir una ponderación entre los diferentes factores causales concurrentes con el objetivo de verificar si hay un mayor peso de los elementos extralaborales o laborales en la génesis de la enfermedad para la edad y el tiempo de exposición al factor de riesgo del individuo afectado (p. 19). En los estudios de lesiones músculo-esqueléticas relacionados con el trabajo se reconoce que los mecanismos de aparición son: a) la interacción multivariante que se refieren a factores genéticos, artritis, diabetes, morfológicos, biomecánicos, uso continuo de la muñeca en flexión y los factores psicosociales; b) la teoría diferencial de la fatiga (desequilibrio cinético y cinemático); c) la cumulativa de la carga (repetición); y d) el exceso de fuerza (Vernaza & Sierra, 2005).

En un estudio de la Universidad Nacional de Colombia (2009) encontraron que existen múltiples hipótesis que explican esta patología. La primera es una compresión mecánica del nervio mediano por causas del sobre uso, hiperextensión repetitiva o prolongada de la articulación de la muñeca y por otra parte, el uso prolongado de herramientas manuales. En la segunda, se menciona la vibración debida a la sobreexposición a las vibraciones producidas por herramientas. Estos factores mencionados de alguna forma tienen alguna incidencia sobre las causas de esta patología (García, González & Gómez, 2009).

Esta enfermedad está ocasionando cada vez más la incapacidad laboral y está asociada a altos costos por atención médica, cirugías e indemnización por incapacidad (Idrovo, 2003). Inclusive, puede llegar a ser incapacitante tanto que el individuo tiene que dejar de trabajar y realizar otras tareas productivas (Parra, Parra, & Tisiotti, 2007).

Y como Parra, et al. (2007):

«En casos extremos, el síndrome del túnel obliga a las personas a tener una intervención quirúrgica y a perder muchos días de trabajo o les impide trabajar del todo debido a que el funcionamiento de sus manos se deteriora por completo» (p.12). En si el interés ocupacional radica en que es un problema potencialmente incapacitante y de un alto costo para diferentes sectores de la industria colombiana.

Silverstein, considera que los movimientos son repetidos por lo menos 30 ciclos por minuto por más del 50% del trabajo. La labor repetitiva se entiende cuando se trata del mismo movimiento involucrando las mismas articulaciones y grupos musculares (músculos de la mano). Y por otra, la falta de periodos adecuados de pausas y recuperación entre cada ciclo (como sucede en los

teclados de los computadores). Esta patología se ha caracterizado como una condición resultante de la inflamación causada por el movimiento repetitivo del antebrazo, la muñeca y la mano por un tiempo prolongado. Se deduce que cuando los trabajadores usan sus dedos y flexionan sus muñecas repetitivamente, se pueden inflamar los tendones dentro del túnel carpiano. En cuanto a las posturas inadecuadas de los movimientos de la muñeca, la flexoextensión mayor de  $20^\circ$ , la desviación radial mayor de  $15^\circ$  o ulnar mayor de  $20^\circ$  causan el desplazamiento de los tendones y su fricción contra superficies adyacentes. Se tienen antecedentes que estos movimientos incrementan la presión en el túnel carpiano, llegando a producir cambios neurofisiológicos y síntomas de la mano (Instituto de Seguros Sociales, 1998). Otro autor, Gossel (2001) señala que al aumentar la fuerza para el agarre pueden aumentar las presiones al túnel carpiano, empeorar la función del nervio mediano y acelerar el síndrome del túnel carpiano. El mismo autor, considera que las mujeres tienen un riesgo significativamente más alto de padecer esta patología que los hombres. Se desconoce el factor para este alto riesgo. Por ejemplo, el esfuerzo intenso en las manos de las jornadas domésticas, la mecanografía y otros trabajos pueden contribuir a su alta incidencia y por consiguiente la lesión se puede atribuir a causas laborales. Algunos estudios hacen referencia de la relación que existe entre el trabajo repetitivo solo o combinación de factores de riesgo y el síndrome del túnel carpiano. Hay otra evidencia que nos dicen que hay una asociación entre el STC y posturas extremas. Y así mismo, la evidencia del trabajo con la muñeca y la vibración (Rodríguez, 1997).

## FACTORES DE RIESGO ERGONÓMICO

Los factores de riesgos identificados que prevalecen para el túnel carpiano son multifactoriales y se puede dividir en: 1. Anatómicos por disminución del tamaño del túnel, 2. Por anomalías óseas ligamentarias del carpo, incluyendo entidades inflamatorias, 3. Fisiológicos (neuropatías, diabetes tipo I, alcoholismo, cigarrillo, alteraciones del balance de líquidos; embarazo, obesidad y enfermedad de Raynaud (Ministerio de la Protección Social, 2007). Posiblemente, los identificados son aquellos que están relacionados con el trabajo y los movimientos repetitivos de la mano (dedos) (Saaibi, 1998). Sin embargo, también concurren otros factores como el género, ya que las mujeres tienen un riesgo más alto de padecer el síndrome que los hombres. Posiblemente porque el carpo es más pequeño en las mujeres. Estos contribuyen en la génesis del síndrome incluyen problemas mecánicos en la muñeca, estrés laboral y el uso repetido de herramientas. Esto es resultado de una combinación de factores que aumentan la presión sobre el nervio en el lugar de ser un problema del nervio (Jordán, Pachón & Reguera, 2005). Roel, Arizo, & Ronda, 2006, mencionan que las principales causas de esta enfermedad de origen laboral son por el

uso de herramientas inadecuadas, técnicas de trabajo deficientes y tareas manuales repetitivas con aplicación de fuerza.

Se han referido a factores ergonómicos que podrían causar esta enfermedad y afectar a los trabajadores, que a continuación los mencionaremos: existen actividades en que los trabajadores disponen diferentes posturas, que de ser inadecuadas pueden inducirle a un estrés biomecánico (aumento de la presión en el túnel carpiano, isquemia y finalmente cambios histológicos en el nervio y en sus tejidos blandos (Mapfre, 2001). La clasificación de las posturas se divide en el siguiente orden: 1. Postura prolongada, cuando se adopta la misma postura por el 75% o más de la jornada laboral (seis horas o más). 2. La postura mantenida, es aquella postura biomecánicamente correcta por dos o más horas continuas sin posibilidad de cambios. Si la postura es biomecánicamente incorrecta, se considerará cuando se mantiene por 20 minutos o más. 3. La forzada, cuando están fuera de los ángulos de confort; y 4. Las posturas antigravitacionales, cuando el cuerpo o un segmento están en contra de la gravedad (Ministerio de la Protección Social, 2007). En la postura concurren movimientos de la muñeca que pueden causar desplazamientos de los tendones y fricción contra superficies adyacentes, estos pueden ser flexo extensión mayor de 20° o desviación radial mayor de 15°. Se conocen algunos antecedentes de que este mecanismo biomecánico, incrementa la presión del túnel carpiano que lleva a cambios neurofisiológicos y síntomas de la mano (Ardila, 2005).

Otro de los factores de riesgo ergonómico es la carga física a los que está sometido el trabajador, durante la jornada laboral; esta se basa en dos tipos de trabajo muscular, que son: el estático y el dinámico. La estática se manifiesta por las posturas, y la dinámica está determinada por el esfuerzo muscular, los desplazamientos y el manejo de cargas (Fundación Mapfre, 1998. En: Ministerio de Protección Social, 2007). El factor de riesgo por requerimiento de fuerza, es aquella tensión producida en los músculos por el esfuerzo requerido para el desempeño de una tarea. Y se pueden clasificar como riesgo cuando se superan las capacidades del trabajador a. Cuando se da un esfuerzo en carga estática, cuando se realiza el esfuerzo en forma repetida y cuando los tiempos de descanso son insuficientes (Ministerio de la Protección Social, 2007). La fuerza se genera en los músculos y es transmitida por los tendones, huesos y ligamentos, ya que la mayoría de las actividades requieren de la ejecución de fuerzas para trasladar, impulsar o estabilizar los dedos y la muñeca contra la gravedad, la inercia, los pesos y la fuerza de reacción (Ardila, 2005).

Aquí mencionaremos aquellos factores específicos asociados con el trabajo y los movimientos repetitivos de la mano, la muñeca y otros. Los movimientos repetidos que incluyan flexión, extensión y desviación cubital de la muñeca

particularmente cuando se combinan con la acción de agarrar alguna herramienta. Otros autores como Palmer, concluyen que la utilización persistente y prolongada de herramientas manuales vibrantes duplican con exceso el riesgo de contraer esta patología. Y como lo refieren otros estudiosos; existen evidencias que hacen notorio los riesgos similares los vinculados a la flexión y extensión de la muñeca durante largos periodos y en régimen altamente repetitivo, sobre todo cuando dicho movimiento va acompañado de una fuerza prensil (Organización Internacional del Trabajo, 2009). Estas afecciones traumáticas acumulativas afectan a menudo a individuos en ocupaciones específicas como se menciona más adelante (Szabo, 1995).

Los movimientos repetitivos durante largos periodos pueden provocar alteraciones en el aparato locomotor (componente muscular). El trabajo repetitivo es cuando se mueven una y otra vez las mismas partes del cuerpo humano, sin tener pausas durante un tiempo o de variar los movimientos. Se determina por la frecuencia (número de veces), el grado de esfuerzo, rapidez y velocidad, posición y movimientos reforzados y periodos de descanso insuficiente de la actividad laboral realizada (Organización Mundial de la Salud, 2004).

A su vez, se considera que un trabajo repetitivo es cuando la duración del ciclo de trabajo fundamental es menor de 30 segundos o cuando se dedica más del 50% del ciclo a la ejecución del mismo tipo de acción (Silverstein, 1986. En: MAPFRE, 2001). Ahora, existen otros criterios de trabajo repetitivo que son: cuando se realizan dos piezas por minuto, 120 a la hora ó 980 piezas por día. Cuando se realizan entre 7.600 y 12.000 movimientos que requieran fuerza al día. Cuando se producen 1.500 movimientos de la muñeca en una hora. El trabajo repetitivo se realiza normalmente con las partes distales de las extremidades superiores (muñeca, mano y dedos), mientras que en el hombro estabilizan el brazo, realizando un trabajo más estático. Según este documento de MAPFRE, parece que los trabajos repetitivos (ciclo menor de 30 segundos) y una fuerza alta asociada ( $>$  de 4 kilogramos), presentan tasas de incidencia de lesiones músculo-esqueléticas 15 veces superiores a las que se presentan asociadas a trabajos con repetitividad y fuerzas bajas (Bascuas, 2001).

En un estudio de Piedrahita (2004) en el cual menciona las evidencias de la relación causal entre factores de riesgo físicos en el trabajo y el desarrollo de desórdenes músculo-esqueléticos en las extremidades superiores mano/muñeca (síndrome del túnel carpiano), encuentra que la repetición y la vibración tienen una evidencia de relación con los factores de trabajo y seguidamente la combinación de estas, encuentra una fuerte evidencia (Piedrahita, 2004). Y como lo menciona Evanoff y Rempel (1999) las características de las tareas que han estado asociadas con elevadas tasas de desórdenes y síntomas en extremidades superiores, incluyendo el STC. Estas son la repetición, fuerza, posturas

extremas, vibración, contacto mecánico, duración y organización del trabajo (Evanoff & Rempel, 1999).

## METODOLOGÍA

De acuerdo a la taxonomía institucional, el tipo de estudio fue exploratorio-descriptivo de corte transversal, en tanto que pretendió observar e identificar los factores de riesgo ergonómico en un grupo de trabajadoras. La muestra estuvo compuesta por 10 trabajadoras, seleccionadas por medio de muestreo aleatorio simple. Todas fueron del género femenino, con un promedio de edad de 42,6 años. Para el estudio y recolección de los datos se realizaron observaciones directas, aplicación de encuestas-entrevistas y toma de fotografías digitalizadas.

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El análisis se realizó a través de una clasificación y descripción de los datos recolectado durante el trabajo de campo. Las trabajadoras son adultas con un promedio de edad de 42,6 años. Casi el 80% utiliza tijeras para el corte de flores, siendo la principal herramienta de trabajo. Todas son originarias de la región de Tabio Cundinamarca, que tradicionalmente desde los setenta, se ha caracterizado por su actividad económica en el sector floricultor. Respecto a la actividad laboral se observó que el 85% lo realizan manualmente con las manos.

Dentro del análisis e identificación de los factores de riesgo relacionados con esta patología los más frecuentes fueron: posturas inadecuadas al realizar actividades en la siembra (postura en cuclillas). En los movimientos repetitivos como son corte de flores, siembra con el dedo, esqueje, banco de cosecha, pelada de las hojas y fuerza de la muñeca, la mayor demanda se hace en el corte de flores en posición de pie. Las dolencias más frecuentes en orden de aparición fueron: cintura, mano y pantorrilla. Por otra parte están, las ocupaciones que requieren aplicación que alternan continuamente aumento y disminución de fuerzas de las manos y así mismo, las actividades extralaborales como son: lavar, planchar, restregar, barrer, trapear y cocinar. El tiempo de exposición con un promedio de 12 años de antigüedad en el puesto, la ocupación, el uso excesivo de las manos, todos estos factores ergonómicos en el puesto de trabajo se presentan como una enfermedad multifactorial.

Por otro lado, una de las acciones efectivas será la de proteger a las trabajadoras de los factores de riesgo ergonómico y establecer en las empresas de

cultivos de flores una cultura de promoción de la salud con programas de actividades preventivas y diseñar proyectos específicos para el control de riesgos ergonómicos, tal como está estipulado en la resolución número 2646 de 2008 (julio 17). Y así, permita mejorar las condiciones de trabajo y salud, como la productividad de las empresas. Igualmente, se debe tener un control de las cargas físicas de los miembros superiores, de las posturas y movimientos repetitivos a través de rotaciones y capacitación de los trabajadores. A su vez, intervenir a través de métodos ergonómicos y diseñar puestos de trabajos con criterios ergonómicos para reducir esta patología y restringir los gastos que está ocasionando esta patología en el sector laboral colombiano. Finalmente, no existe a la fecha tecnología que sustituya las tijeras y el tipo de tareas realizadas, ya que este exige un alto grado de calidad, que lo da la experiencia y objetividad en el corte. Por otro lado, buscar alternativas para la mecanización y automatización de las tijeras. Finalmente, recomendamos hacer prevención primaria e intervenir en la modificación de los diseños de puestos de trabajo con criterios ergonómicos, corrección de posturas y la planificación de las pausas para reducir este problema que se está incrementando anualmente.

## REFERENCIAS

- ARDILA, A. Intervención fisioterapéutica en prevención para síndrome del túnel carpiano en usuarios de videoterminals. Tesis de especialización. Universidad El Bosque. Bogotá, D.C., Colombia, 2005.
- BASCUAS, J. Ergonomía. Instituto de Ergonomía. MAPFRE. Madrid, España, 2001.
- CILVETI, S. & V. IDOATE. Posturas forzadas. Ministerio de Sanidad y Consumo. Madrid, España, 2000.
- EVANOFF, B. & REMPEL, D. Epidemiology of upper extremity disorders. En: Karwoski, W. Marras. The occupational ergonomics handbook. Boca Raton, Florida, USA, 1999.
- FARRER, F, MINAYA, G. & NIÑO, G. *Manual de Ergonomía*. Madrid, España: MAPFRE, 1995.
- GARCÍA, G, GONZÁLEZ, A. & GÓMEZ, A. Síndrome del túnel del carpo. *Revista Morfolia* 2009;1(3):11-23.
- GOSEL, T. Síndrome del Túnel Carpiano. Una guía para manejarlo por medio de un tratamiento no invasor. Beiersdorf, S.A. Littleton, Colorado. USA, 2001.
- INSTITUTO DE BIOMECÁNICA DE VALENCIA. Evaluación de riesgos de lesión por movimientos repetitivos. Valencia, España, 1996.

- INSTITUTO DE SEGUROS SOCIALES. ARP. Síndrome del túnel carpiano. Prevalencia de la enfermedad y validación de un set de pruebas de tamizaje en poblaciones ocupacionalmente expuestas de Santafé de Bogotá y la sabana de Bogotá. Editorial Trazo Ltda. Bogotá, D.C. Colombia, 1998.
- JORDÁN, M, PACHÓN, L. & REGUERA, R. Síndrome del túnel carpiano: vinculación básica clínica. *Revista Médica Matanzas* 2005;13:1-4.
- MAPFRE. *Ergonomía*. Zaragoza, España: MAPFRE, 2001.
- MINISTERIO DE LA PROTECCIÓN SOCIAL. Guía de Atención Integral de Salud Ocupacional Basada en Evidencia para Desórdenes Músculo Esqueléticos (DME) relacionados con movimientos repetitivos de miembros superiores (Síndrome de Túnel Carpiano, Epicondilitis y Enfermedad De Quervain) 2007;4:1-119.
- \_\_\_\_\_. Informe de Enfermedad Profesional en Colombia. 2003-2005. Bogotá, D.C. Colombia, 2007.
- \_\_\_\_\_. Factores de riesgo psicosocial en el trabajo. (Resolución Número 2646 de 2008). Bogotá, D.C. Colombia, 2008.
- \_\_\_\_\_. Tablas de Enfermedades Profesionales. (Decreto 2566). Bogotá, D.C. Colombia, 2009.
- MINISTERIO DE TRABAJO Y SEGURIDAD SOCIAL. Guía para el control de riesgos ocupacionales. Bogotá, D.C. Colombia, 1995.
- ORGANIZACIÓN INTERNACIONAL DEL TRABAJO. Documento de información técnica sobre las enfermedades que plantean problemas para su posible inclusión en la lista de enfermedades profesionales que figura como anexo de la recomendación sobre la lista de enfermedades profesionales. (Publicación No. 194). Ginebra, Suiza, 2009.
- OSPINO, C. "Salud y trabajo en el sector floricultor». Ponencia presentada en el Foro Sector Floricultor. Noviembre, Bogotá, D.C. Colombia, 2005.
- PARRA, L. (2010). Panorama de los riesgos de Trabajo en Colombia y sus Escenarios Probables para el 2016. *Revista Colombiana de Salud Ocupacional* 2010;1:5-7.
- PARRA, F, PARRA, L. & TISIOTTI, P. Síndrome del túnel carpiano. *Revista de Posgrado*. Cátedra de Medicina. No. 73, 2007.
- PIEDRAHITA, H. Evidencias epidemiológicas entre factores de riesgo en el trabajo y los desórdenes músculo-esqueléticos. *MAPFRE MEDICINA* 2004;15:212-221.
- PIÑEDA, A. *Manual de Antropometría aplicada a la ergonomía*. Bogotá, Colombia: Editora Guadalupe. Corporación Universitaria Republicana, 2009.

# ALGORITMOS GENÉTICOS EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES

CRISTIAN C. FORERO\*

Recibido: 7 de agosto de 2013 / Aceptado: 20 de julio de 2013

## RESUMEN

Este artículo busca presentar el desarrollo de un programa informático basado en un algoritmo genético para solucionar ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas.

Múltiples problemas de diversos campos de la ciencia pueden solucionarse a través de estas ecuaciones.

**Palabras clave:** algoritmo genético, ecuación diofántica.

## ABSTRACT

This article wants to present the deployment of an computer program based on a genetic algorithm to solve linear Diophantine equations with two unknowns. Many troubles in different science areas can be solved through these equations.

**Keywords:** genetic algorithm, diophantine equation.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema enfrentado en esta contribución busca desarrollar un algoritmo genético que permita solucionar ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, para tal fin se desarrollara un aplicativo de software en el lenguaje de programación PHP, dicho algoritmo se convertirá en una útil herramienta para la solución de múltiples problemas en diversas áreas del conocimiento como la física, la química, entre otras.

Se desarrolló un algoritmo en php cuya función de costo de ejemplo que fue:

$$30x + 12y = 1200$$

---

\* Ingeniero Electrónico. Candidato a Magister en Ingeniería Industrial. Grupo de Investigación y Desarrollo en Ingeniería de Sistemas(GIDIS) de la Corporación Universitaria Republicana. Bogotá, Colombia. Correo electrónico: [ingcamiloforero@urepublicana.edu.co](mailto:ingcamiloforero@urepublicana.edu.co)

Se escogió una población inicial de 10 parejas  $(x,y)$  de números enteros que se generan aleatoriamente; de esta población, se seleccionan los 5 mejores y estos se reproducen para generar 5 descendientes, para completar la población se agregan 5 parejas de números aleatorios adicionales y se repite el proceso.

## 2. LAS ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES

Una ecuación es enunciado que establece que dos expresiones algebraicas son iguales algunas veces contiene valores desconocidos llamados incógnitas, una ecuación es diofántica cuando solo admite soluciones que pertenecen al conjunto de los números enteros y es lineal cuando involucra constantes y variables cuya potencia máxima es 1.

## 3. EL PROBLEMA QUE INSPIRO ESTE DESARROLLO

[1] Un hombre va a una tienda de ropa y compra 12 trajes, unos negros y otros grises, por 1200 •. Si los trajes negros valen 30 • más que los grises y ha comprado el mínimo posible de estos últimos, ¿cuántos trajes ha comprado de cada color?

Trajes negros:  $x$

Trajes grises:  $12 - x$

Precio de un traje gris:  $y$

Precio de un traje Negro:  $y + 30$

La ecuación queda:  $x(y+30) + (12-x)y = 1200$

Reduciendo términos semejantes:  $30x + 12y = 1200$

## 4. ALGORITMOS GENÉTICOS

Un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite ejecutar un procedimiento o resolver un problema, un algoritmo es genético cuando utiliza principios de la genética y la selección natural.

Los algoritmos genéticos ganaron popularidad a finales de la década de los 90's, debido en gran medida a las nuevas tecnologías en hardware y la reducción de costo de las computadoras que permite generar desarrollos de bajo costo<sup>3</sup>.

Los Algoritmos Genéticos trabajan sobre estructuras de cadena que son una representación de una posible solución al problema denominados

cromosomas, estos cromosomas evolucionan a través del tiempo de acuerdo a reglas de supervivencia que privilegian a los que presenten mejor desempeño frente a una función de costo dándoles una mayor probabilidad de a partir de ellos se cree la siguiente generación; adicionalmente pueden agregarse nuevos cromosomas generados aleatoriamente o a partir de una mutación.

En algunos casos para que un elemento de la población pueda pasar a través de la función de aptitud debe ser codificado, este proceso de codificación es clave para permitir que el algoritmo converja de manera más eficiente hacia la solución del problema planteado, en principio la codificación puede realizarse con cualquier alfabeto finito, sin embargo, no todas las codificaciones resultan ser computacionalmente eficientes, es deber del programador dependiendo de la plataforma de software o hardware que elija escoger que codificación resulte mas conveniente.

Luego de haber decidido que codificación usar una serie inicial de cadenas (población) es creada aleatoriamente. entonces una serie de operadores se aplica a la población para crear nuevas generaciones que se espera tengan mejor desempeño; una función de aptitud sirve para medir la calidad de cada cromosoma de la población.

La función objetivo es usada para dar una medida de como los individuos se desempeñan en el dominio del problema. En el caso de un problema de minimización, los individuos más aptos tendrán el menor valor numérico asociado a la función objetivo<sup>6</sup>.

$$30X + 12y = 1200$$

Figura 1. Función objetivo.

La función de aptitud transforma la función objetivo en un valor no negativo.

X	Y	$3*x + 5*y$	distancia
5	67	954	246

$$d = |1200 - (30x + 12y)|$$

Figura 2. Función de aptitud.

#### 4.1. Operadores en Algoritmos Genéticos

Aunque no existe en la comunidad alrededor de la computación evolutiva una definición rigurosa de que es un algoritmo genético, se acepta que debe

tener una etapa en la que se genera la población inicial de manera aleatoria, una etapa de selección, una de cruce y una etapa de mutación<sup>2</sup>.

#### **4.1.1 Selección**

Este operador se encarga de escoger cuales de los cromosomas de la población se reproducirán de acuerdo a su desempeño frente a la función de aptitud.

#### **4.1.2. Cruce**

Este operador toma los cromosomas padre y a partir de la información que contienen crea los cromosomas hijo utilizando diferentes técnicas.

#### **4.1.3. Mutación**

Este operador cambia alguno de los cromosomas de la población y lo modifica parcialmente por ejemplo la cadena 01001 puede ser mutada como 00001 cambiando la segunda posición de 1 a 0.

#### **4.1.4. Copia**

Es una reproducción de tipo asexual. Un número determinado de individuos pasa sin ninguna variación a la siguiente generación<sup>5</sup>.

## **5. ALGORITMO DISEÑADO**

El algoritmo cuenta con el siguiente diagrama de flujo (ver figura 3).

### **5.1. La función de costo**

El primer paso en el desarrollo del algoritmo consiste en definir la función de costo, para nuestro caso en particular la función que evalúa la aptitud es la ecuación de dos variables que buscamos resolver se reemplazan los valores de  $x$  y de  $y$  en la ecuación y la aptitud será la distancia al resultado.

### **5.2. Las restricciones**

Con el fin de permitir que el algoritmo converja hacia la solución de una manera más rápida se restringe el valor de la variable  $x$  para que no sea mayor que doce, el valor de  $y$  para que no sea mayor que cien; los valores en

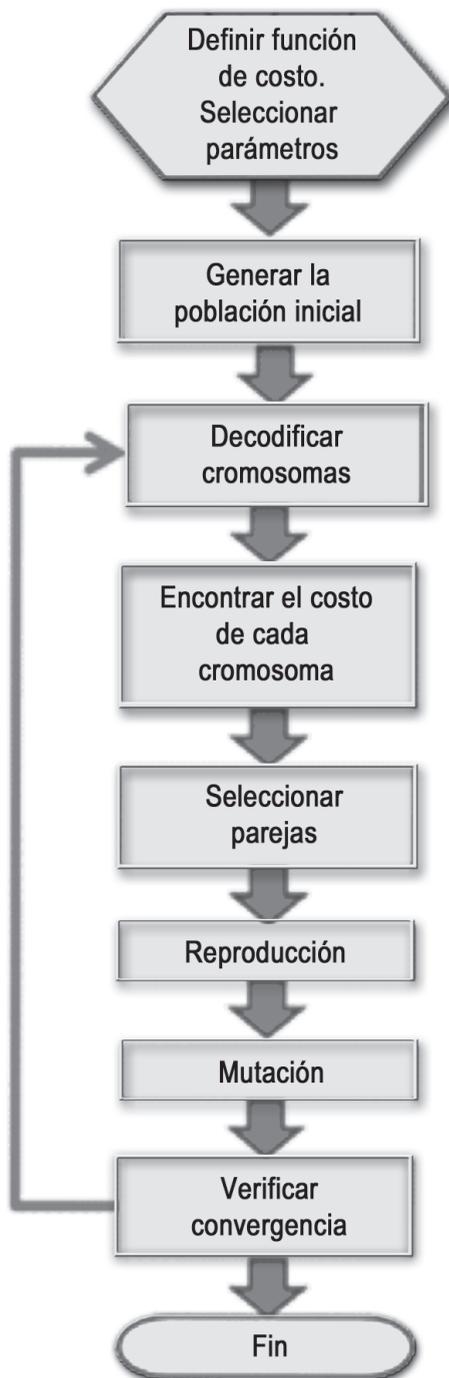


Figura 3. Diagrama de Flujo<sup>4</sup>

sí mismos deben ser enteros y se ajusta el algoritmo para que busque la mínima solución posible debido a que la ecuación en si misma tiene múltiples soluciones.

### 5.3. La codificación

Para el presente algoritmo no se utilizó codificación binaria ni de ningún tipo debido a que los valores de las parejas enteras (x,y) aleatoriamente generadas pertenecientes a la población pueden evaluarse directamente en la función de aptitud

### 5.4. Selección

El algoritmo escoge de cada población de 10 elementos los 5 mejores y estos los cruza para generar 5 descendientes para completar los 10 elementos de la segunda generación se agregan 5 parejas aleatorias.

### 5.5. Cruce

Debido a que el algoritmo evalúa cantidades enteras que no han pasado por ningún proceso de codificación se utilizó como método de cruce el promedio de las dos cantidades enteras, como este promedio no siempre corresponde a una cantidad entera, si el resultado era decimal, se redondeaba a la cantidad entera más cercana.

### 5.6. Mutación

En el presente algoritmo no se utilizó la mutación para los elementos de la población.

## 6. RESULTADOS

En el presente ejemplo se tomaron cuatro generaciones y se evidencia como el promedio de las mismas tiende hacia cero que es el valor objetivo (ver figura 4).

En la cuarta generación el promedio de los 10 elementos de la población corresponde al valor de 121.2 (ver tabla 1).

De la anterior imagen vale la pena resaltar los dos elementos resaltados debido a que corresponden a un clon uno del otro por ende al pasar a través de la función de aptitud se obtiene para ambos el mismo resultado.

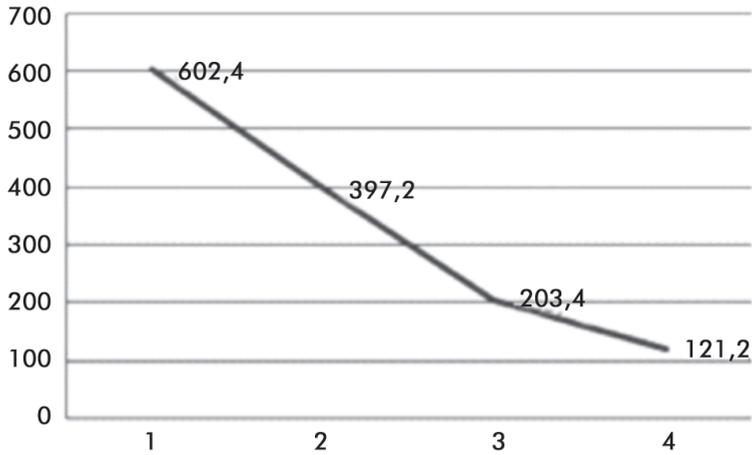


Figura 4. Evolución del Promedio en las primeras cuatro generaciones.

Tabla 1. Parejas con su respectivo valor de aptitud.

X	Y	Posición	Distancia
4	89	0	12
4	86	5	48
4	84	1	72
4	80	2	120
4	78	6	144
4	78	8	144
4	77	7	156
8	66	4	168
4	76	3	168
4	75	9	180
			121,2

Como solución luego de 14 generaciones se obtuvo que el hombre compró 2 trajes grises y 10 trajes negros cada traje gris costo 75• y cada traje negro costo 105•.

## 7. CONCLUSIÓN

Los algoritmos genéticos se constituyen en una valiosa herramienta para solucionar ecuaciones con múltiples variables y específicamente ecuaciones diofánticas, en este documento se presentó una metodología y sus resultados experimentales.

## 8. REFERENCIAS

1. <http://gaussianos.com/como-resolver-ecuaciones-diofanticas/>
2. MELANIE, M. *An introduction to genetic Algorithms*, 1999.
3. GN BELIGIANNIS, C MOSHOPOULOS, SD LITKOTHANASSIS. *A genetic algorithm approach to school timetabling*. In: *Journal of the Operational Research Society*, 2009.
4. RANDY L. HAUPT, SUE ELLEN HAUPT. *Practical Genetic Algorithms*, 2004.
5. M. GESTAL POSTE. *Introducción a los Algoritmos Genéticos*.
6. A. CHIPPERFIELD, P. FLEMMING, H. POHLHEIM, C. FONSECA, *Genetic Algorithm Toolbox User's Manual*, 1994.

# ROBOTS HERRAMIENTAS PARA LAS AULAS DE CLASE

EVELYN GARNICA ESTRADA\*

*Recibido: mayo de 2013 / Aceptado: junio de 2013*

## RESUMEN

El presente artículo expone la propuesta de aplicación de un producto que se ha venido desarrollando en la Corporación Universitaria Republicana denominado Plataformas Robóticas Multifunción, que consiste en robots programables basados en guías de aprendizaje que son desarrolladas en las aulas de clase con el fin de dinamizar la formación en asignaturas propias del programa de ingeniería de sistemas de la Universidad; donde se hace necesario que el aprendizaje de conceptos teóricos en algunas asignaturas se vea aplicado sobre entornos reales, para que sea más comprensible para los estudiantes.

**Palabras clave:** Robots, aprendizaje, guías, metodología.

## ABSTRACT

This paper describes the proposed implementation of a product that has been developed at Corporación Universitaria Republicana, called Wedges Multifunction Robotic, consisting of programmable robots based tutorials that are developed in the classroom in order to boost the training in subjects own systems engineering program at the University, where it is necessary for the learning of theoretical concepts in some subjects look applied on real environments, to make it more understandable for students.

**Keywords:** Robots, learning, guides, methodology.

## INTRODUCCIÓN

Al observar que la robótica esta impactando positivamente en muchos campos se puede aprovechar la gran cantidad de beneficios y versatilidad que puede ofrecer a las actividades que realiza el hombre, en este caso los docentes, quienes ejercen actividades que se pueden acompañar con nuevas y adaptables herramientas de enseñanza.

La idea de utilizar robots surge de la necesidad de dinamizar los ambientes de clase y adoptar metodologías activas de aprendizaje; al introducir un nuevo

---

\* Ingeniera de diseño y automatización electrónica. Especialista en Planeación, Desarrollo y Administración de la Investigación. Docente Investigadora. Grupo de investigación y desarrollo de Ingeniería de Sistemas (GIDIS) de la Corporación Universitaria Republicana. Correo electrónico: egarnicae@urepublicana.edu.co

instrumento en el aula para los estudiantes se presentan ventajas y beneficios para llevar a cabo con éxito cada una de las actividades de las asignaturas asociadas.

La importancia de este estudio, radica en la tendencia actual del mejoramiento continuo de procesos a través de elementos tecnológicos, ya que hoy en día los temas de automatización y robótica son escenarios de mejora en la calidad de vida del hombre y sus tareas, de optimización de procesos y de acelerar cada vez más la forma de hacer las cosas; en ese sentido se identifican áreas de acción donde la robótica puede mejorar los procesos de formación.

## METODOLOGÍAS EDUCATIVAS

Las metodologías educativas suelen girar alrededor de las teorías del aprendizaje (basadas en la psicopedagogía) como son el conductismo, cognitivismo, constructivismo y el conectivismo. Cada paradigma tiene sus procesos, actividades y métodos de actuación (Fidalgo, 2011) que constituyen recursos necesarios de la enseñanza; son las guías de realización ordenada, metódica y adecuada de la misma.

Los métodos y técnicas tienen por objeto hacer más eficiente la dirección del aprendizaje. Gracias a ellos, pueden ser elaborados los conocimientos, adquiridas las habilidades e incorporados los ideales y actitudes que se pretende proporcionar a los estudiantes (2009, 12).

El uso de robots como instrumento de apoyo a la formación de los estudiantes incide en la generación de nuevos métodos y técnicas dentro de las metodologías tradicionales empleadas. La estrategia didáctica necesaria para transformar los procesos tradicionales de enseñanza, consiste en abordar un conjunto de procedimientos, apoyados en técnicas de enseñanza a través de elementos complementarios, que tienen por objeto llevar a buen término la acción didáctica, es decir, alcanzar los objetivos de aprendizaje. (Abeli, 1995).

## DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA IDENTIFICADO

Se ha identificado un común denominador en los estudiantes universitarios del país y es la pérdida de interés por algunas asignaturas de los programas que estudian, una de las causas del bajo rendimiento académico y la deserción. Esto se debe a que no se ve aplicada la teoría en aspectos prácti-

cos reales que motiven al estudiante a seguir explorando y experimentando sobre las prácticas de las materias y se limitan a memorizar teoría y a realizar prácticas algunas veces obsoletas lo que genera falta de interés y falta de motivación dentro y fuera del aula.

Por esta razón se hace necesario emplear estrategias activas en los procesos de formación mediante el uso de sistemas robóticos animatronicos en las aulas de clase con el fin de ofrecerle a los docentes nuevas iniciativas de enseñanza-aprendizaje y que las apropien en su que hacer para conseguir dinamizar las actividades de aprendizaje con el uso de herramientas físicas que interactúen con el estudiante, demostrándole la aplicación de teorías, de expresiones matemáticas, de comportamientos físicos, entre otros elementos relevantes en el proceso.

## JUSTIFICACIÓN

Desde el aspecto pedagógico, la robótica se puede convertir en una parte central de las metodologías de estudio por las innumerables ventajas que se obtiene en su utilización llevando al aula situaciones que de otro modo serían tradicionales y poco aplicadas (Odorico, 2004, p. 1) .

Si se observa los avances que está teniendo lugar la tecnología en general en la sociedad, aplicada en distintas profesiones, los docentes no pueden ser simplemente observadores ante este avance, es claro que las nuevas tecnologías están involucrándose cada vez más, transformando la enseñanza tradicional, y que los docentes han de dar ese paso de forma clara y decidida, como Odorico, Lage y Cataldi (2007) consideran, que «aportando ese cambio de metodología, la transmisión de información va a tener infinitas vías, dejando atrás la época de la tiza y tablero y los libros de texto como soporte casi único para la enseñanza-aprendizaje».

La transferencia de conocimiento de cualquier área esta mediatizado por diferentes medios (teorías, mapas, matemáticas, etc.) y debido a sus características cada medio ofrece una representación, es así como la robótica puede convertirse en un posible medio para aplicar el conocimiento sobre entornos reales y funcionales.

La funcionalidad de herramientas tecnológicas educativas, vendrá determinada por las características y el uso que se haga del mismo, de su adecuación al contexto y la organización de las actividades de enseñanza. Desde el punto de vista del estudiante las herramientas tecnológicas se convierte en un medio de aprendizaje.

Odorico, Lage y Cataldi (2007), distinguen dos tipos de aprendizaje cuando se utiliza la computadora como instrumento: aprender de la computadora y aprender con la computadora. Se aprende de la computadora en aquellas situaciones en las que el material informático es cerrado, tiene un diseño fijo y persigue unos objetivos didácticos precisos. Se aprende con la computadora en situaciones abiertas en las que el objetivo didáctico no está contenido en el «software». En ese sentido se podría afirmar que sucede lo mismo con los robots como instrumento de aprendizaje: aprender del robot y aprender con el robot, aprovechando las dos situaciones que se pueden presentar; abiertas y cerradas.

## ANTECEDENTES

La idea de introducir herramientas tecnológicas al aula se presenta desde el año 1975, en la Universidad Du Maine, en Le Mans, Francia, donde usaron sistemas para el aprendizaje de la robótica I (Nonnonet Laurencenlle, 1984, citado por Salamanca, 2010), por otro lado en 1989, la Universidad Autónoma Metropolitana y la Universidad Nacional Autónoma de México trabajaron en la implementación de un robot educativo para el aprendizaje de conceptos informáticos básicos (Ruíz, 1987, citado por Salamanca 2010); En España, desde el 2008 compublot se ha dedicado a implementar aulas de robótica y cursos asociados al aprendizaje de los sistemas orientado a niños de formación primaria (2008, citado por Salamanca, 2010).

La nueva Ley del Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones de Colombia creó un marco normativo para el desarrollo del sector y promover: el acceso y uso de las TIC a través de la masificación, el impulso a la libre competencia y el uso eficiente de la infraestructura, en ese sentido en el país algunas instituciones fortalecen las competencias de los estudiantes de la media academia con herramientas tecnológicas, en colegios distritales como por ejemplo el colegio los periodistas ubicado en la localidad de Kennedy, que incorporaron hace más de cuatro años kits de robótica educativa Lego provenientes de Dinamarca reconocidos principalmente por sus bloques de plástico interconectables. En TecnoParque Colombia SENA sensibilizan y orientan proyectos de base tecnológica haciendo uso de kits de Fischer Technik, son plataformas robóticas alemanas modulares, similares al Lego pero con funciones superiores de programación y electrónica. Universidades como La Salle, Tadeo Lozano, Distrital, entre otras hacen uso de estas herramientas, pero las prácticas son limitadas debido a sus altos costos, por esta razón surgen proyectos de robótica al interior de los grupos de investigación de estas instituciones.

La Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá generó un grupo de investigación llamado Plataformas Robóticas en el año 2001 como iniciativa de

un grupo de profesores y estudiantes interesados en el tema de la Robótica. Inicialmente desarrollaron proyectos pequeños y seminarios extra clase sobre diferentes temas concernientes al campo. Hoy en día desarrollan proyectos tanto en robótica móvil como en robótica industrial generando automatizaciones para los diferentes laboratorios de la universidad. En dicha universidad surgió un proyecto de construcción de un robot móvil didáctico para trabajo con niños de básica primaria (Peña, 2002).

Por otro lado, la Universidad Javeriana adelanta proyectos de investigación en Robótica en el aula desde el Grupo de Sistemas Inteligentes, Robótica y Percepción (SIRP) donde se enfocan en aplicar estrategias activas para fortalecer las competencias técnicas a través de los concursos de robótica en diferentes categorías.

Desde hace algunos años en otras Universidades en Colombia como la Universidad Jorge Tadeo lozano y en el exterior como la Universidad Autónoma de México han adquirido cerca de 70 robots con el fin de apropiarse las tecnologías asociadas a la automatización y contribuir con la mejora de ambientes de los demás programas de estas universidades, como el caso de la Universidad Jorge Tadeo lozano donde la biología marina se articula con la Tecnología en robótica y automatización industrial con el fin de tecnificar algunas áreas como el laboratorio de animatrónica bioinspirada en el Museo del Mar y el laboratorio de agrobótica, entre otros.

Basados en lo anterior, se han presentado avances de robótica en las aulas de clase de colegios, institutos, diferentes universidades, el SENA, centros de investigación, entre otros; donde utilizan los robots pre construidos, modulares y armables, para realizar prácticas lúdicas con fines motrices y de aplicación.

Lo que se ha visto al interior de los proyectos de las diferentes instituciones es que se están apropiando tecnologías emergentes abordando prácticas educativas con robots, sin embargo no se han formalizado estas prácticas en las asignaturas, debido a que se dan como cursos de extensión o formación complementaria en otras instituciones.

## BASES TEÓRICAS

Una plataforma robótica se puede definir como un sistema integrado que sirve como base para hacer funcionar determinados módulos de hardware y software para llevar a cabo un función específica. En el presente trabajo de investigación se ha adoptado este termino debido a que se encuentra estrechamente relacionado con el concepto de animatronicos, definidos como sistemas

electromecánicos multipropósito con características similares a los seres vivos, multifuncionales y multipropósito. Sin embargo no siempre se puede hablar de animatronics ya que la morfología de un robot puede variar de acuerdo a su aplicación así que a este conjunto de elementos se le domina plataforma robótica.

Durante los últimos años y debido a los acelerados avances tecnológicos, ha ido apareciendo progresivamente diversos tipos de sistemas artificiales de apariencia antropomórfica, conocidos con el nombre de robots. Un robot se conoce como una entidad virtual o mecánica artificial; por lo general es un sistema electromecánico que, por su apariencia o sus movimientos, tiene un propósito propio.

La robótica es la ciencia y la tecnología de los robots, se ocupa del diseño, manufactura y aplicaciones de los robots; la robótica combina diversas disciplinas como son: la mecánica, la electrónica, la informática, la inteligencia artificial y la ingeniería de control. Otras áreas importantes en robótica son el álgebra, los autómatas programables y las máquinas de estados. (2011, 02).

La robótica, como herramienta puede tener la misión de involucrar a los estudiantes en el aprendizaje de una forma activa.

La interactividad es la clave para que exista una sensibilización en el desarrollo de la ciencia y la tecnología. De aquí surge el modelo de robótica pedagógica, donde docentes investigadores de diferentes lugares del mundo han generado esta nueva disciplina para favorecer los procesos cognitivos dentro de las aulas de clase.

Martial Vivet (1990) propone la siguiente definición de robótica pedagógica: Es la actividad de concepción, creación y puesta en funcionamiento, con fines pedagógicos, de objetos tecnológicos que son reproducciones reducidas muy fieles y significativas de los procesos y herramientas robóticos que son usados cotidianamente, sobre todo, en el medio industrial.

La Robótica pedagógica se entiende como la disciplina que se encarga de concebir y desarrollar robots educativos para que los estudiantes se inicien en el estudio de las Ciencias (Matemáticas, Física, Electricidad, electrónica, Informática y afines) y la tecnología (Ruiz-Velasco, 1987a).

También se habla de Robótica educativa que esta definida por la Real Academia Española de la lengua (2009) como: La técnica que aplica la informática al diseño y empleo de aparatos que, en sustitución de personas, realizan operaciones o trabajos, por lo general en instalaciones industriales.

En general, cuando se habla de robots en la educación se debe visualizar un medio de aprendizaje, para el diseño y construcción de proyectos y materialización de ideas, que pedagógicamente se habla de estrategia y disciplina y educativamente se concibe como el medio y la técnica.

El uso de las plataformas robóticas en la educación se entiende como un modelo pedagógico, que privilegia el aprendizaje inductivo y por descubrimiento guiado (Ruiz-Velasco, 1987b), lo cual asegura el diseño y experimentación, de un conjunto de situaciones didácticas que permiten a los estudiantes construir su propio conocimiento y a su vez se dinamizan los ambientes de aprendizaje donde se trabaje con esta disciplina.

El aprendizaje inductivo genera conclusiones a partir de la experiencia por cada sesión de clases, los estudiantes pueden realizar interrelaciones, interconexiones y reflexiones sobre el conocimiento adquirido en la práctica.

Mediante este método los estudiantes adquieren capacidades para analizar e inferir causas y soluciones posibles. No consiste en la absorción de información, sino que busca desarrollar la capacidad reflexiva del alumno, y que éste genere opiniones y cuestione la información. A su vez el aprendizaje por descubrimiento guiado genera el desarrollo de destrezas de investigación y solución de los problemas.

Cuando se habla de optimizar y dinamizar los ambientes de aprendizaje se refiere a mejorar las circunstancias que se disponen en el aula de clase como los son el entorno físico, recursos, capacidades y estrategias que se usan, en pro de promover y garantizar que el estudiante adquiera las competencias de una forma más eficiente gracias a los medios disponibles.

## CONTEXTO

En la Corporación Universitaria Republicana de la ciudad de Bogotá se oferta el programa de Ingeniería de Sistemas desde hace cinco años con la filosofía de ofrecer contenidos diferentes y brindar una propuesta de programa distinto a los que se ofrecen en el país; de allí viene la idea de crear líneas de especialización e investigación sobre robótica aplicada, con el fin de desarrollar proyectos que solucionen necesidades reales al interior y al exterior de la Corporación.

Desde el año 2010 se inicia la investigación y desarrollo en el campo de la robótica donde se ha venido trabajando en el diseño de actividades basadas en plataformas robóticas multipropósito para dinamizar las clases de diferentes

disciplinas, lo que ha permitido generar diferentes propuestas de investigación para solucionar problemáticas reales al interior de las aulas de clase.

En la actualidad se tiene prototipos de robots multifunción, para el desarrollo de las clases en diferentes temáticas y con estas herramientas se abordarán las pruebas para tomar la información necesaria como resultados del proceso de investigación, con el fin de plantear la propuesta formal acerca de las metodologías activas de enseñanza basadas en herramientas robóticas.

## ROBÓTICA UBICUA

Una de los principales elementos que soporta la presente investigación es la robótica ubicua siendo la integración de la robótica en el entorno de la persona, de manera que los robots no se perciban como objetos diferenciados sino como elementos necesarios para realizar algún tipo de tarea o multitarea, en este punto el robot se vuelve omnipresente en la vida del hombre, es decir que se puede volver esencial en la vida del docente y el estudiante.

Es importante realizar un análisis de los requerimientos necesarios para que la robótica ubicua pueda desarrollar tareas en un campo de acción determinado, hoy en día es una realidad los robots dotados de inteligencia para abordar localización y navegación cooperativa, percepción cooperativa del entorno, construcción cooperativa de mapas, interacción robot humano, distribución de multitareas, entre otros aspectos que hacen al robot cada vez mas independiente del hombre, y por el contrario el hombre se esta volviendo más dependiente de estas tecnologías.

Uno de los principales objetivos de la robótica ubicua, es hacer que los dispositivos computacionales sean una necesidad primaria para las personas. Este objetivo de crear instrumentos que se mezclen en las aulas de clase, supone una potencial revolución que puede hacer cambiar el modo de orientar una clase y recibir las lecciones; las personas se centrarían en las tareas que deben hacer, no en las herramientas que utilizan, porque se pretende que esas herramientas pasen desapercibidas.

## ROBOTS PARA LA ENSEÑANZA

La robótica integra, a través de un robot, distintas áreas del conocimiento como matemáticas, física, electrónica, mecánica, informática entre otras, convirtiéndola en una gran alternativa para la enseñanza (Caballero, 2011).

El área de la robótica es tan versátil, que permite llevar a cabo experimentos con los conocimientos teóricos adquiridos y a la vez profundizar en los mismos. De ello, se deriva la importancia que debe darse a esta herramienta en la enseñanza y en la preparación de los futuros profesionales de áreas de la ingeniería, donde el estudiante pueda utilizarla como una herramienta más para reforzar los conocimientos que va adquiriendo en las distintas disciplinas.

Según Caballero, dentro de la educación se habla de orientaciones las cuáles se deben ejecutar bajo medios tecnológicos, estas orientaciones son las siguientes:

- a. Las orientaciones didácticas:** La Educación tecnológica pretende que los alumnos logren una comprensión del mundo artificial y una capacidad para desenvolverse efectivamente dentro del mismo, en un nivel que podría denominarse alfabetización tecnológica.

La alfabetización tecnológica de los estudiantes incentiva la capacidad para apreciar el desarrollo tecnológico y su relación con la sociedad y el ambiente, la capacidad para reflexionar sobre los actos tecnológicos propios y ajenos en el marco de su impacto social y ambiental y la capacidad de ejecutar actos tecnológicos con calidad, respeto ambiental, creatividad, efectividad y ética.

Los estudiantes a través del aprendizaje con tecnología, tienen la oportunidad de usar una variedad de medios para distinguir y enunciar problemas y, resolver problemas prácticos en un contexto social, adquirir y usar durante su trabajo tres tipos de habilidades interrelacionadas:

- El cómo hacer.
- La comprensión de procesos y la adquisición de conocimientos.
- Arriesgarse a tomar decisiones, desarrollar múltiples soluciones a problemas, probar y mejorar, trabajar en equipo, responsabilizarse por los resultados y administrar los recursos en forma efectiva y eficiente.

- b. La orientación tecnológica:** Desde una perspectiva técnica, la tecnología se relaciona con la capacidad de creación e intervención en las aplicaciones tecnológicas. Las personas se pueden relacionar con la tecnología desde diferentes perspectivas:

- Como usuarios, cuya relación se caracteriza por la utilización responsable de los objetos y servicios.

- Como técnicos, cuya relación está orientada a la producción de objetos y servicios.
- Como innovadores, como diseñadores de nuevas aplicaciones; esto es, nuevas formas de interacción, nuevos productos o servicios.

Estas perspectivas no son excluyentes, un estudiante o docente puede ser a la vez un usuario, un técnico y un innovador. Estos roles sólo ilustran las diferentes posibilidades de relación con la tecnología. Sin embargo, participar de éstos requiere conocimientos y habilidades diferentes.

Desde la perspectiva del uso, se define una orientación a una adecuada utilización del objeto, en nuestro caso, los robots; desde la técnica, se orienta al desarrollo de capacidades necesarias para intervenir en la funcionalidad de los mismos; desde la perspectiva innovadora, se orienta a la creación de nuevas funcionalidades y diseños.

## ANÁLISIS Y PRÁCTICAS

Realizando un análisis en los contenidos temáticos de algunas asignaturas del programa de ingeniería de sistemas, se observa que los contenidos teórico-prácticos no se deben limitar a los ambientes y herramientas típicas de aprendizaje como lo son un salón de clases y un laboratorio con equipos de computo para abordar las prácticas.

En la mayoría de los casos la forma de cómo se orienta estas asignaturas esta basada en metodologías tradicionales, la propuesta es romper el paradigma de que esta es la única forma de orientar las asignaturas, pues es posible usar herramientas que dinamicen algunos módulos de los contenidos temáticos de las asignaturas.

Los robots proporcionan un gran aporte en los procesos de formación y es la motivación, enseñanza y estudio de las ciencias a través del uso del sistema mecatrónico como una herramienta didáctica para cualquier tipo de estudiante de cualquier edad.

No es necesario profundizar en temas técnicos de robótica, el objetivo es profundizar en la asignatura a través de la los robots.

Una de las tantas posibles metodologías que se pueden plantear en este proyecto de investigación, abarca las fases de identificación de la plataforma, programación de la plataforma y validar funcionamiento del robot, mediante

la definición de un conjunto de actividades que ayudan a los estudiantes a entender mejor el problema a resolver, las características finales que deberá tener el sistema robótico y el papel que juega en la solución del problema.

El proceso de diseño de actividades según el contenido temático empieza por el diagnóstico, planteamiento de necesidades, características intrínsecas y extrínsecas en las necesidades presentadas por el contenido, delimitaciones, proceso de evaluación, estructuración jerárquica de procesos, componentes relevantes del sistema y criterios técnicos importantes para la definición de la actividad conceptual y de detalle luego de poner en marcha la actividad dada con un sistema robótico (figura 1).

El proceso descrito anteriormente pretende abordar aplicaciones con actividades sobre sistemas robóticos en nuestro primer caso con animatronicos, en prácticas futuras se dará con vehículos terrestres autónomos y semi-autónomos, plataformas de robots multifunción (de rescate, de uso personal y de servicio), entre otros.

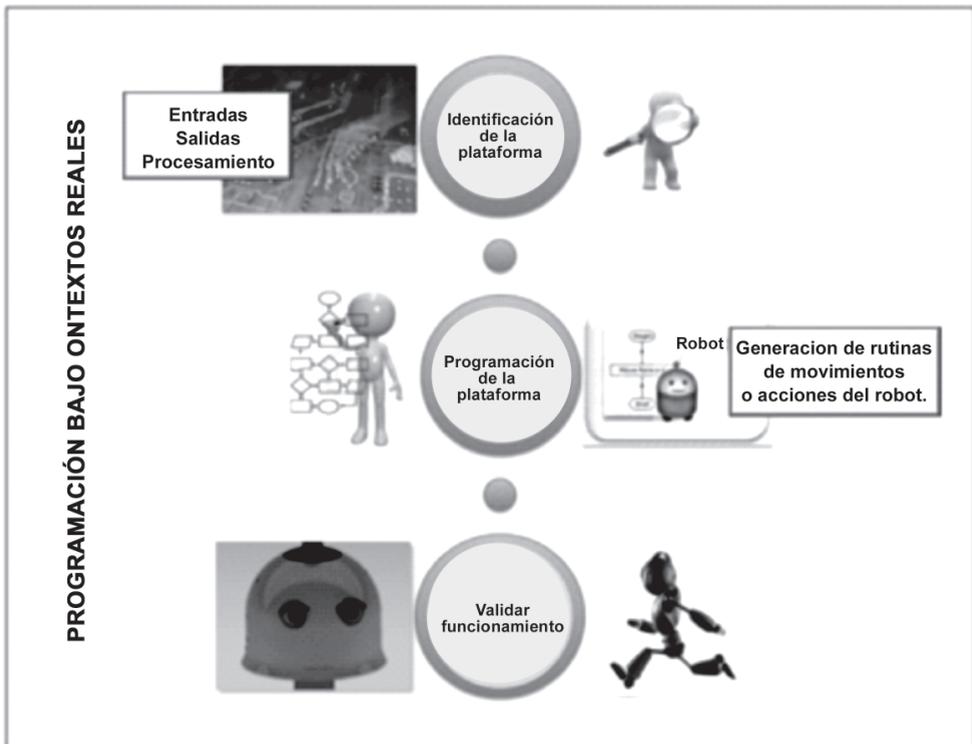


Figura 1. Etapas de aprendizaje con robots.

Al trabajar actividades interdisciplinarias es importante tener en cuenta todos los procesos involucrados en la inmersión de sistemas robóticos para tener un flujo organizado de actividades y llevar a cabo de manera eficiente el proceso de enseñanza.

Por ejemplo en áreas de matemáticas, se puede abordar el estudio de la aritmética, algebra, geometría, cálculos, entre otros; en áreas de física, se puede trabajar desde magnitudes físicas, pasando por vectores, movimientos en una, dos y tres dimensiones, estática, dinámica, trabajo y energía, entre otros. En áreas de biología como por ejemplo forma de estudiar la anatomía humana y animal a través de medios audiovisuales mediante sistemas robóticos, y en áreas afines a la ingeniería de sistemas como el diseño de algoritmos y programación para no programar sobre compiladores en el PC; sino resolver problemas bajo la programación de las plataformas y ver realmente la respuesta sobre un ambiente físico.

## REFERENCIAS

- ABELI, Hans. 12 Formas básicas de enseñar (una didáctica basada en la psicología), Madrid, Nercea, 1995.
- ALONGRA, P. Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones. Historia. [Documento de www]. URL: <http://www.mintic.gov.co/index.php/historia>.
- CABALLERO L. Dolores. Aplicación de Técnicas Didácticas en cursos virtuales. Instituto Tecnológico de Monterrey. Material de apoyo de curso de formación: Herramientas TICS para la formación. SENA – CEET, 2011.
- COMPUBLOT 2008. Aula de robótica del APA del C.P. Miguel Hernández. [Online] Disponible en internet <[http://complubot.educa.madrid.org/nosotros/nosotros\\_index.php?seccion=nosotros](http://complubot.educa.madrid.org/nosotros/nosotros_index.php?seccion=nosotros)> [citado en 01 de julio de 2010].
- FIDALGO, A. «La innovación docente y los estudiantes», pp 84-91 La Cuestión Universitaria, ISSN 1988-236X 2011;7.
- GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN PLATAFORMAS ROBÓTICAS. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingenierías. Extraído de: <http://www.unrobot.unal.edu.co/>
- NONNON, P. et LAURENCELLE, L. 1984. «L' appareteur-robot et la pédagogie des disciplines expérimentales: Spectre. No.22 pp. 16-20. [citado en 01 de julio de 2010].

ODORICO, A. Marco teórico para una robótica pedagógica. Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales. ISSN 2004;1667-8338.

\_\_\_\_\_, LAGE F. y CATALDI Z. Educación en robótica, una tecnología integradora. Laboratorio de Informática Educativa y Medios Audiovisuales, Facultad de Ingeniería. UBA. Instituto Superior del Profesorado Técnico. Universidad Tecnológica Nacional, 2007.

PEÑA, E. Construcción de un robot móvil didáctico, para trabajo con niños de básica primaria. Trabajo de Grado. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

RUIZ, E. 1987. La robótica pedagógica. Centro de Estudios sobre la Universidad CESU, Universidad Nacional Autónoma de México. [Online] Disponible en internet <<http://virtual.pascualbravo.edu.co/buzon/cintex.garpe/robotica.doc>> [citado en 01 de julio de 2010].

SÁNCHEZ C. Mónica. Ambientes de Aprendizaje con Robótica Pedagógica. Universidad de los Andes. Trabajo de Maestría en Ingeniería Electrónica y Computadores, 1992.

UNIVERSIDAD JORGE TADEO LOZANO 2011. Centro de Robótica e Informática. Angélica Ruiz C. [Online] Disponible en internet <http://www.utadeo.edu.co/programas/ceri/>

VIVET, M. Robotique Pédagogique Les Actes du Iie Congrès International Édité par Pierre Nonnon. Montreal, Canadá, 1990.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. DICCIONARIO DE LA LENGUA ESPAÑOLA. 2009. Disponible en: <http://lema.rae.es/drae/?val=robotica>

2009, 12. Artículo Habilidades de la Enseñanza. BuenasTareas.com. Recuperado 12, 2009, de <http://www.buenastareas.com/ensayos/Articulo-Habilidades-De-La-Ense%C3%B1anza/82465.html>

2011, 02. Introducción a La Robótica. BuenasTareas.com. Recuperado 02, 2011, de <http://www.buenastareas.com/ensayos/Introduccion-a-La-Robotica/1565267.html>



# DESPLIEGUE DE UNA APLICACIÓN INTERACTIVA BAJO EL ESTÁNDAR DVB-T Y SU IMPACTO EN LA RED DE RADIODIFUSIÓN Y RETORNO

JOSÉ ALEJANDRO FRANCO CALDERÓN\*

*Recibido: 4 de junio de 2013 / Aceptado: 30 de julio de 2013*

## RESUMEN

El presente artículo socializa de una manera clara los resultados de investigación obtenidos al desarrollar un contenido interactivo para televisión digital terrestre, bajo la norma DVB-T desarrollado con el estándar de programación MHP, este contenido converge con otros sistemas como las plataformas web y los dispositivos móviles, adoptando una metodología de desarrollo de software tradicional donde se divide el proyecto en análisis, planeación, ejecución, implementación y despliegue, por último se analizó el impacto de este último dentro de una red de radiodifusión de televisión digital bajo la norma DVB-T con acceso a un canal de retorno por medio del protocolo TCP/IP, demostrando así que el peso asociado al transporte de la aplicación interactiva dentro de la radiodifusión de un contenido/servicio afecta la capacidad para la transmisión con calidad para un canal digital, adicionalmente el impacto de dicho contenido para el despliegue en un decodificador (set top box) interactivo esta estrechamente ligado al peso del desarrollo informático, es decir a mayor peso de una aplicación interactiva mas tiempo consume su descarga y posterior visualización en la pantalla de un televisor, por último se concluye de forma significativa que el éxito de un canal digital en alta definición con un servicio interactivo pasará por una serie de estándares de calidad sujetos a la validación de terceros (el radiodifusor), dentro de los cuales se dará una clara importancia a la eficiencia en el despliegue dentro de la red de transmisión, una guía de estilo valida para la navegación, uso y apropiación del contenido y una masificación de decodificadores para la accesibilidad de la tecnología en un territorio geográfico establecido.

**Palabras clave:** contenidos interactivos, radiodifusión de televisión digital, DVB-T, MHP, programación en set top boxes.

## ABSTRACT

This article socialize in a clear way the research results to develop interactive content for digital terrestrial television in the DVB-T standard developed with the programming standard MHP, this content converges with other systems such as web platforms and devices mobile, adopting a methodology of traditional software development where

---

\* Ingeniero electrónico, especialista en diseño de aplicaciones para televisión digital terrestre y en administración de tecnologías de la información para la comunicación virtual. Docente Investigador. Grupo de Investigación y Desarrollo de Ingeniería de Sistemas (GIDIS) de la Corporación Universitaria Republicana. Correo electrónico: alejing@urepublicana.edu.co

the project is divided into analysis, planning, execution, implementation and deployment, finally the impact of content was analyzed within a network of digital television broadcasting in the DVB -T standard with access to a return channel to the TCP / IP protocol, showing that the weight associated with the transport of the interactive application in broadcasting content / service affects the ability for transmission quality for a digital channel, further impact of such content for display in a decoder (set top box). Interactive is closely related to the weight of software development, if greater weight of an interactive application most time consuming downloading and subsequent visualization on a TV screen, Finally we conclude significantly that the success of a digital channel in high definition with an interactive service will go through a series of quality standards subject to third party validation (the broadcaster), within which will clearly important to efficiency in the deployment within the transmission network, a style guide valid for navigation, use and ownership of content and mass of decoders for accessibility of technology in a geographic territory established.

**Keywords:** interactive content, digital broadcasting television, DVB-T, MHP, programming set top box.

## I. INTRODUCCIÓN

Es de libre conocimiento en términos generales la constante actualización y evolución de los estándares para la televisión digital<sup>1</sup>, pero también es de conocimiento que la mayoría de estos estándares están encaminados a prestar servicios de valor agregado como lo son la interactividad o la alta calidad en imagen y sonido<sup>2</sup>, sucintado así uno de los cambios mas grandes para la radiodifusión de contenidos audiovisuales en aproximadamente 50 años de existencia, estas ventajas asociadas a la interactividad permitirán un nuevo ecosistema digital propicio para la convergencia de aplicaciones en múltiples dispositivos.

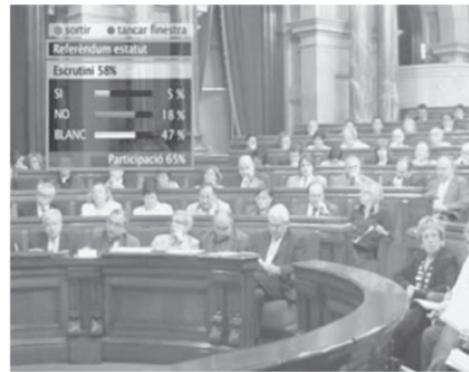
La interactividad por un medio de transmisión radiodifundido (RF), es decir haciendo uso del espectro radioeléctrico, deberá estar asociada a la elección de un estándar de televisión digital, para Colombia la norma elegida fue DVB-T<sup>3</sup>, estándar europeo para la radiodifusión de contenido audiovisual con la posibilidad de inyección de contenido informático adicional en su cadena de transmisión, esto es posible en una red de transmisión DVB-T por medio del middleware de programación MHP (*Multimedia Home Platform*)<sup>4</sup>, con una seria tendencia mundial al cambio e integración de nuevas y mejores tecnologías para un mejor desempeño.

El estándar MHP ha sido documentado en un sinnúmero de sitios en la web, referencias bibliográficas y organizaciones sin ánimo de lucro, adicionalmente en el seno de su origen se han hecho ya algunos despliegues de servicios interactivos tanto en modo de pruebas piloto como lanzamientos comerciales, lo que conlleva a bastantes aplicaciones enmarcadas en diversos contextos<sup>5</sup>, como lo son (ver figuras 1 y 2):



Fuente: <http://www.tdt1.com/>

**Figura 1.** Aplicación interactiva del clima. TVE. España.



Fuente: <http://www.tv3.cat/>

**Figura 2.** Votación de referendo. Televisión de Cataluña. España.

- El video por demanda (VOD),
- el aprendizaje por televisión t-learning,
- el comercio o publicidad por televisión t-commerce,
- el cuidado de la salud por medio de plataformas televisivas t-helad y t-care,
- los juegos interactivos con diferentes tipos de acceso a un canal de retorno t-games,
- los servicios de información básicos para el tránsito, el clima o las guías de programación electrónica (EPG),
- la convergencia entre la administración pública (estado) con sistemas televisivos en proyectos aplicables a t-government, entre otros.

Lo anterior presupone que un sistema de interacción entre el usuario final (televidente) y el radiodifusor (cabecera) es posible y además útil para adoptar en nuestro país, esto hace pasar de un consumidor pasivo a un consumidor activo dentro de la nueva cadena de valor para la televisión digital, pero esta adopción deberá primero transitar por una serie de pasos como la alfabetización digital, la regulación del contenido, la protección a la propiedad intelectual y derechos de autor, la expansión y penetración de infraestructura en telecomunicaciones y la masificación de equipos de consumo aptos para la recepción de contenidos interactivos, donde de principio a fin se garantice un modelo sostenible para el aprovechamiento de este tipo de tecnología.

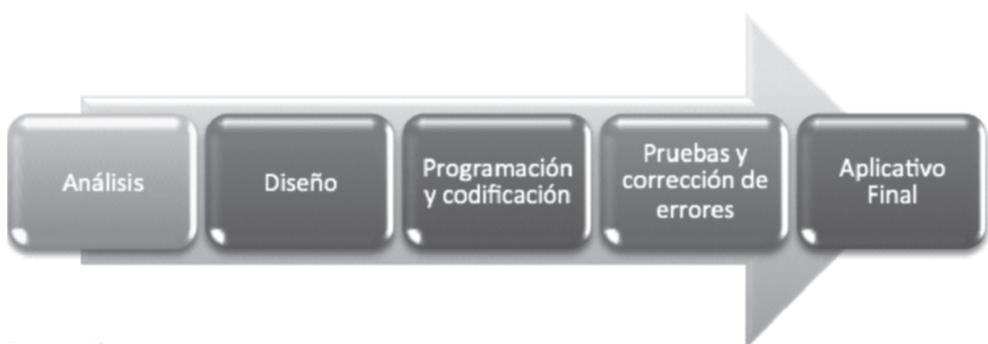
Para una de las anteriores fases citadas como lo son la sensibilización y alfabetización digital de este tipo de desarrollos, se planteo al interior de la Corporación Universitaria Republicana el diseño y desarrollo de una aplicación interactiva con énfasis educativo y con la posibilidad de convergencia con otras tecnologías como los sistemas web y los dispositivos móviles, el diseño propio del aplicativo va mas allá del simple desarrollo, conlleva una apropiación, evaluación e impacto de la tecnología al interior del programa ingeniería de sistemas, y hacia el exterior, una visión global de su uso para la generación de mas y mejores ideas con impacto nacional e internacional en el campo de las TICs.

## II. METODOLOGÍA

El desarrollo de un sistema interactivo bajo el estándar MHP presupone un conocimiento de su base de programación que son los Xlets, el desarrollo de dichos componentes estará enmarcado en la comprensión del lenguaje de programación JAVA, la metodología para el presente desarrollo no varió desde la forma básica de una planeación tradicional para el desarrollo de un aplicativo de software, es decir se eligió el modelo más simple pero a la vez más detallado en cada una de sus fases para una mejor comprensión de la tecnología.

**Modelo lineal:** Análisis > Diseño > Programación y codificación > Pruebas > Implementación y Corrección de errores (ver figuras 3).

Al anterior modelo se le asocio el cumplimiento estricto de un cronograma y la delegación de roles para el desarrollo de piezas gráficas, contenidos textuales, iconografía y funcionamientos adicionales para un alto desempeño desde la capa de visualización para la aplicación, esto presupuso el cumplimiento y seguimiento de ciertas reglas de estilo propuestas y estudiadas por



Fuente: El autor.

**Figura 3.** Modelo lineal para el desarrollo de software.

radiodifusores europeos como la BBC (Inglaterra) o TVE (España)<sup>6</sup>, e integradas de manera armónica según nuestra idiosincrasia y contexto socio cultural para el desarrollo (ver figuras 4).



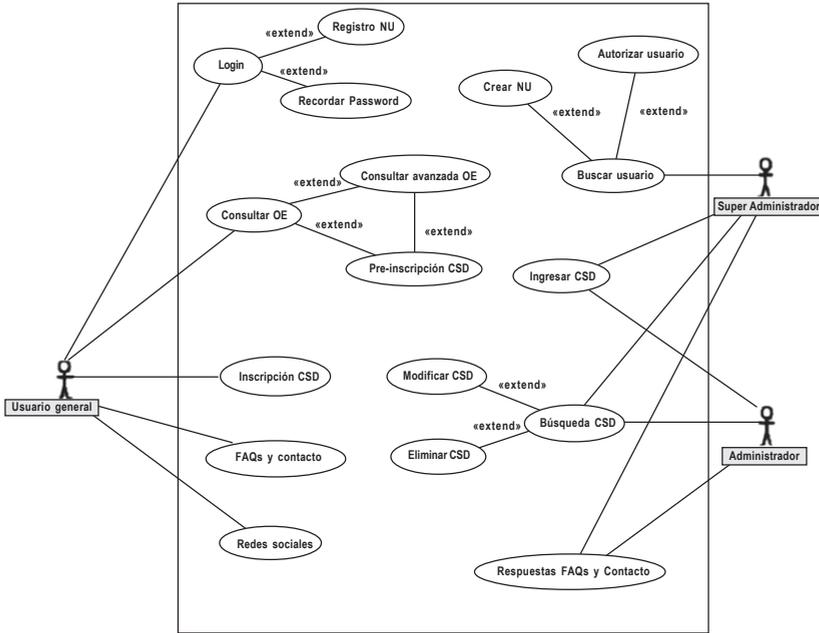
Fuente: El autor.

**Figura 4.** Organización del equipo de trabajo acorde al proyecto

La definición de metodologías para el desarrollo de software, el cumplimiento de cronogramas, y la gestión del talento humano para el desarrollo de un proyecto hace énfasis en una planeación idónea para la apropiación de una tecnología emergente, es decir que el simple hecho de manejar una herramienta no garantizará una perfecta armonía en el desarrollo, es por este motivo que desde el punto de vista de los programadores se exigió una estricta documentación asociada a la diagramación mediante lenguajes unificados de modelamiento (UML)<sup>7</sup>, es decir se crearon diagramas de casos de uso para el levantamiento de requerimientos, diagramas de clases para la organización de los códigos fuentes, diagramas de secuencia y despliegue para el entendimiento en la integración de tecnologías y diagramas de entidad relación para las interacciones con bases de datos, definiendo sobre medida un entendimiento global de la aplicación para las múltiples plataformas en donde coexistió el desarrollo (web, móvil, televisión).

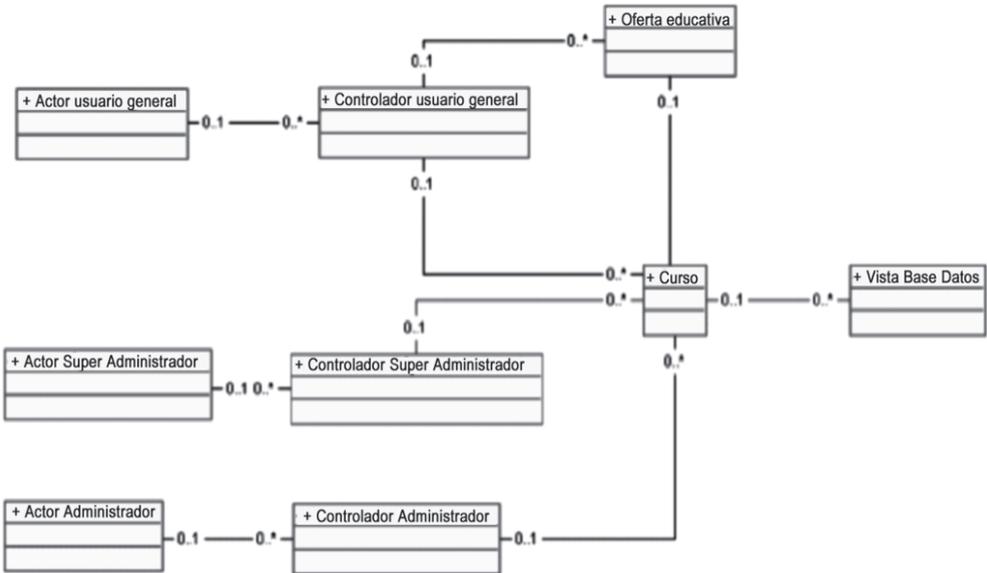
A continuación se presenta un apartado de los diagramas implementados funcionalmente para las tres plataformas (ver figuras 5 a la 10).

Según el contexto para el adecuado desarrollo metodológico del proyecto se hizo necesario definir los equipos a modo de test que se usaron para la posterior muestra de los resultados, dichos equipos se contemplan en un momento del desarrollo denominado pre-producción, es decir antes de que las aplicaciones se validen y pasen a un estado de producción para su uso, implementación y masificación al interior de la comunidad académica de la corporación, en términos generales se uso un equipo móvil bajo sistema operativo iOS,



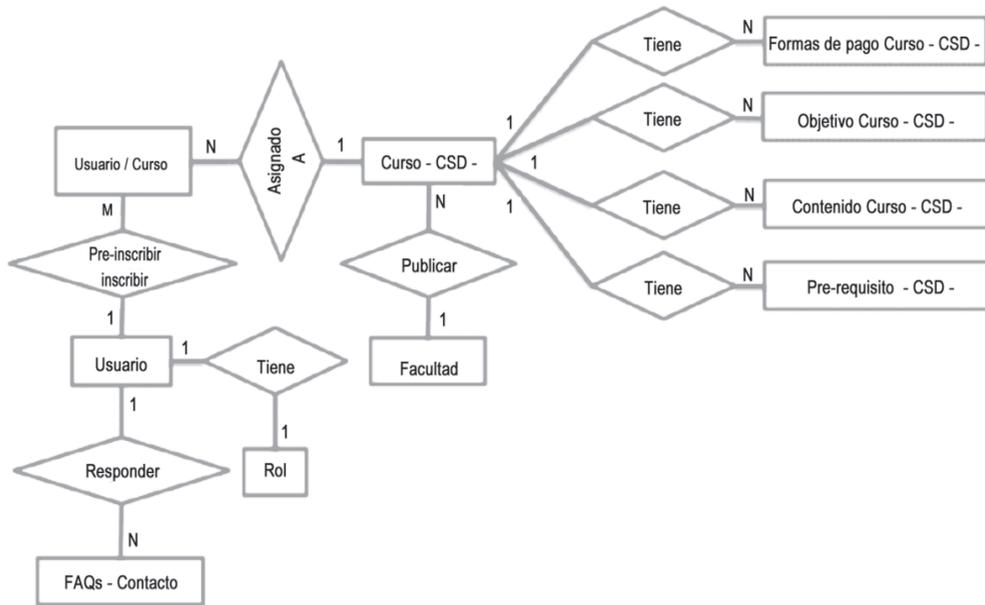
Fuente: El autor.

Figura 5. Levantamiento de requerimientos en forma de casos de uso.



Fuente: El autor.

Figura 6. Diagramas de clases para la empaquetar código fuente.



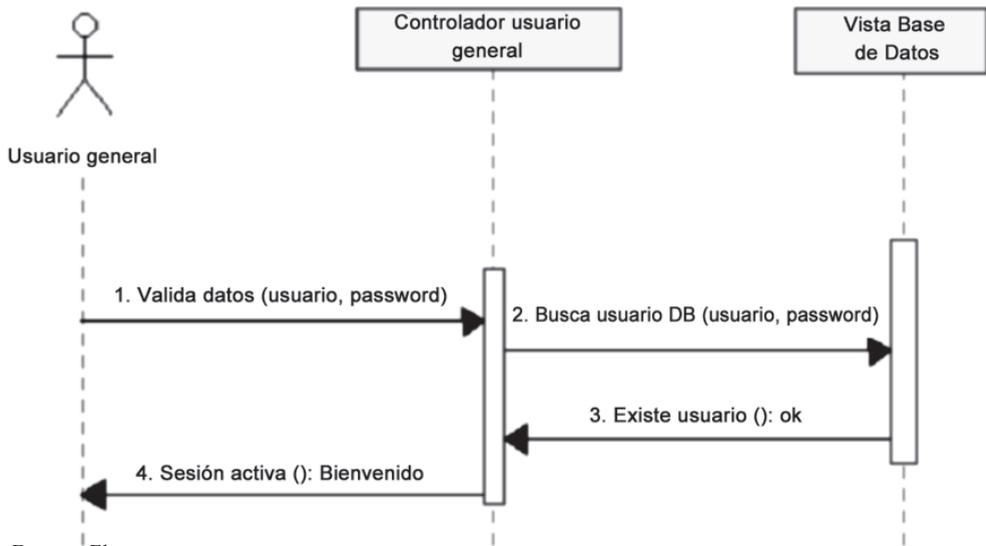
Fuente: El autor.

**Figura 7.** Diagramas de entidad relación para integrar una base de datos.

Entidad	Usuarios								
Descripción	Registra a la información pertinente a los distintos usuarios del aplicativo								
Atributos									
Nombre	¿Llave primaria?	¿Foráneo/a?	Tipo	Longitud	¿Requisito?	¿Nulo?	Valor por defecto	Valores válidos	
Tipo	Si	NO	Numérico	10	Si	No	cc	cc - nit - ti - ex	
Id-usuario	Si	NO	Numérico	10	Si	No			
Nombre	No	NO	Alfanumérico	50	Si	No			
Apellido 1	No	NO	Alfanumérico	50	Si	No			
Apellido 2	No	NO	Alfanumérico	50	Si	No			
E-mail	No	NO	Alfanumérico	50	Si	No			
Teléfono	No	NO	Numérico	10	Si	No			
Celular	No	NO	Numérico	10	Si	No			
Password	No	NO	Alfanumérico	20	Si	No			
Id-usuario-curso	No	Usuario/Curso	Numérico	10	Si	No			
Id-Rol	No	Rol	Numérico	10	Si	No	Estándar	Estándar	
								Alumno	
								Docente	
								Administrador	
								Super Administrador	

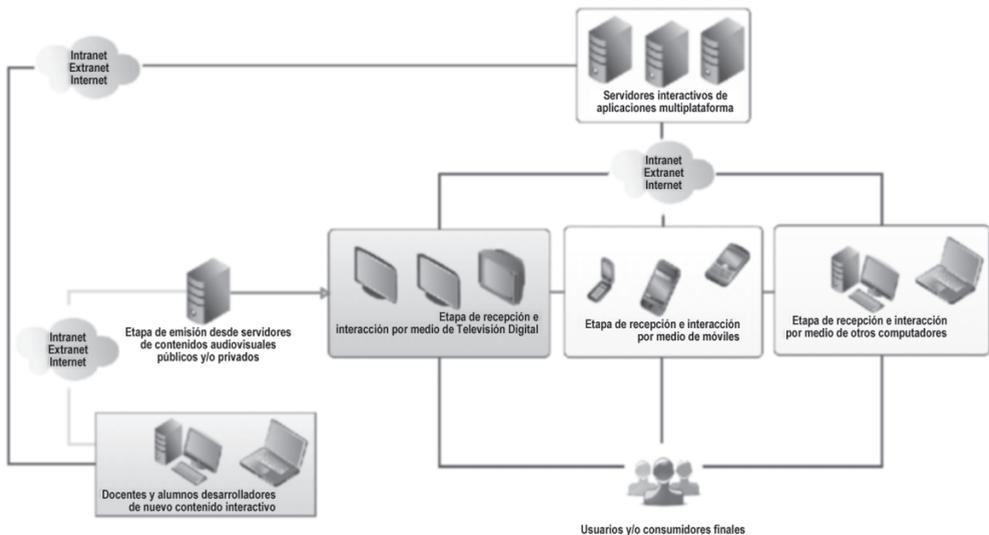
Fuente: El autor.

**Figura 8.** Descripción de la entidad usuario con los atributos definidos.



Fuente: El autor.

**Figura 9.** Ejemplo de uno de los diagramas de secuencia, login exitoso.



Fuente: El autor.

**Figura 10.** Modelo de despliegue de aplicación interactiva en distintos dispositivos.

específicamente un iPod touch 4G, se desplegó en un televisor marca LG, pero este no contenía el middleware mhp que le permitía reproducir contenido interactivo, así que la clave para el desarrollo sobre televisión digital terrestre

fueron dos decodificadores con características diferentes pero totalmente funcionales bajo el estándar que el estado Colombiano aprobó, uno de ellos de la empresa ADB, decodificador híbrido terrestre/satelital, referencia iCAN 3810T y otro de la empresa Telesystem, decodificador terrestre, referencia TS7000, para el desarrollo sobre la web, se probó en equipos portátiles y de escritorio con sistemas operativos Windows y Mac OSX, navegadores internet Explorer, Google Chrome y Safari de la empresa Apple (ver figuras 11 a la 15).

El despliegue básico de una aplicación en un dispositivo móvil o en la web no varía entorno a las tiendas de distribución de aplicaciones (Appstore) presente por fabricantes o por sistemas operativos, adicionalmente el hosting o servidores debieron estar certificados para la adecuada descarga de dichos contenidos, por otro lado al contrario de lo que en un principio se creía el despliegue al interior de una red para televisión digital terrestre tendría un componente particular el cual fue objeto de estudio antes de desarrollar la aplicación misma, ya que para implementarlo a manera de test no era posible desde la cabecera nacional o canales asociados debido a las particularidades propias del tratamiento de la interactividad dentro de la cadena de transmisión para televisión digital, fue así como se hizo uso de un laboratorio del SENA (Servicio Nacional de Aprendizaje) que emitía la señal de televisión digital radiodifundida a baja potencia bajo las características aprobadas por el país, este laboratorio



Fuente: <http://www.apple.com/>

**Figura 11.** iPod touch 4G.



Fuente: <http://www.i-can.tv/>

**Figura 12.** Set Top Box iCAN 3810-T.



Fuente: <http://www.telesystem-world.com/>

**Figura 13.** Set Top Box Telesystem TS7000.



Fuente: <http://www.apple.com/>

**Figura 14.** Mac Book Pro 13", SO Mac OSX.

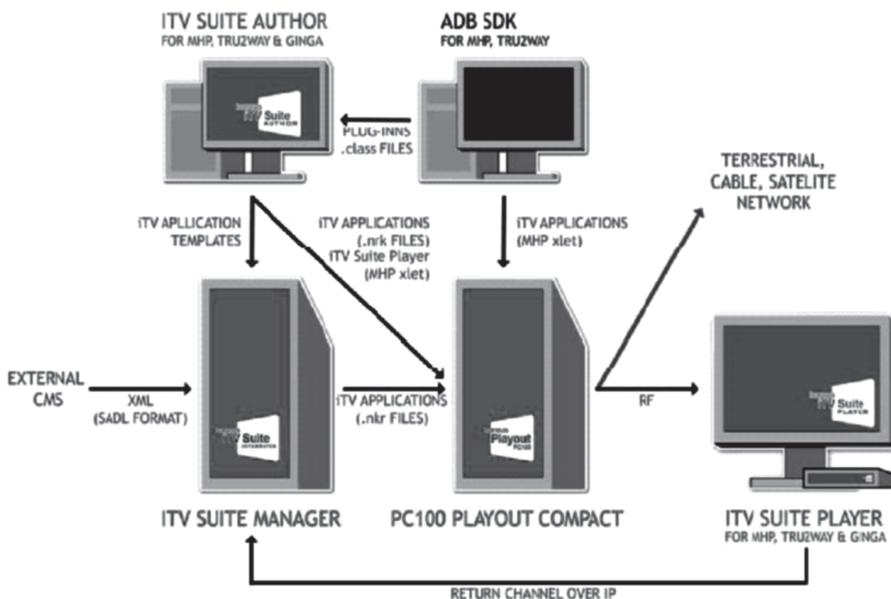


Fuente: <http://www.samsung.com/>

**Figura 15.** Ultradelgado Samsung 13.3", SO Windows 7 Ultimate.

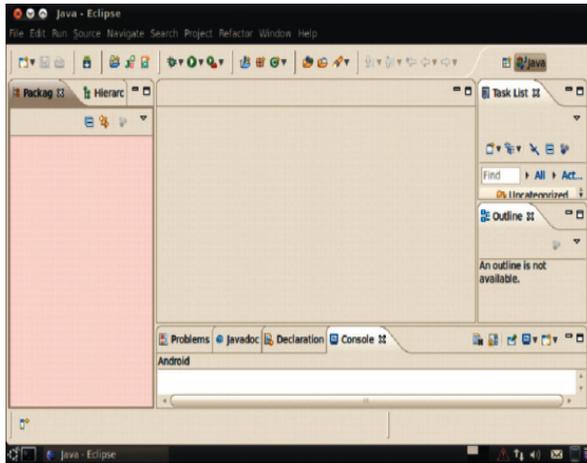
cuenta con elementos tales como, un Playout PC100, un integrador de contenido, dos decodificadores ilustrados en las figuras 12 y 13, un entorno de desarrollo propietario iTVSuite y otro de distribución libre bajo eclipse (osmosys sdk) pero propietario en la simulación (ver figura 16).

Gran parte de lo descrito anteriormente hace referencia a la lógica funcional de las aplicaciones y a su posterior ejecución en el equipamiento de hardware disponible para tales implementaciones, pero con relación a los entornos de desarrollo<sup>8</sup> disponibles para la programación de los mencionados equipos se hizo necesario conocer la capa de aplicación de cada uno de los desarrollos con un alto nivel abstracción y en lo posible orientado a objetos, es así como se integraron lenguajes de programación y tecnologías como j2ee, ajax, html, mhp, objective c, entre otros..., con cada unas de sus APIs o frameworks mas funcionales acorde a la tecnología implementada. Toma mayor relevancia el saber que gran parte de las tecnologías aquí mencionadas no varían en su forma más simple de funcionamiento, pero una vez más cabe resaltar que para el desarrollo sobre una red de televisión digital terrestre se hizo necesario aprender y dominar entornos de desarrollo tanto privativos (de autor) como libres; para la programación del proyecto se uso básicamente el entorno de desarrollo libre llamado eclipse en conjunto con el sdk de osmosys y en cuanto al entorno de desarrollo privativo se uso el iTVSuite de la empresa iCareus (ver figura 17 y 18).



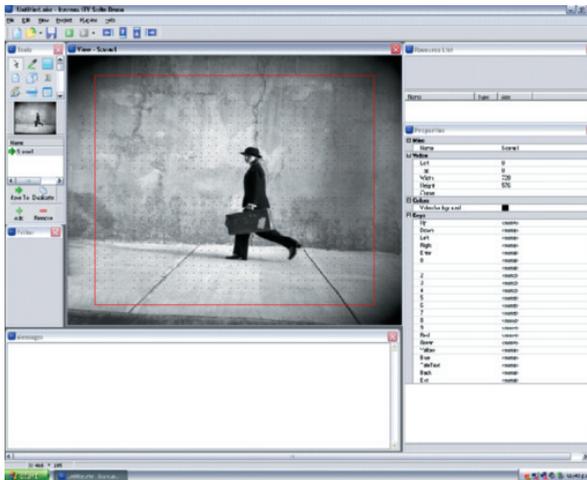
Fuente: <http://www.icareus.com/>

**Figura 16.** Laboratorio de inicio a fin, iTVD - DVB-MHP de iCareus



Fuente: <http://www.eclipse.org/>

Figura 17. Entorno de desarrollo libre eclipse

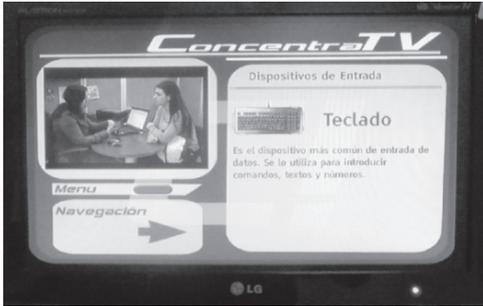


Fuente: El autor.

Figura 18. Entorno de desarrollo privativo iTVSuite.

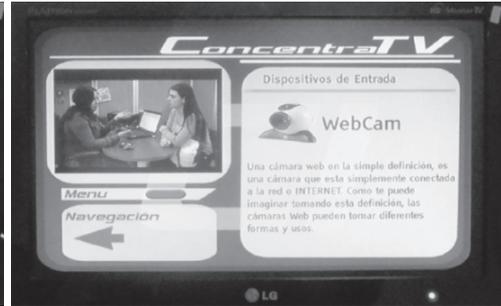
### III. RESULTADOS

Los desarrollos convergentes desde el punto de vista informático tienen un gran valor si es abordado desde la perspectiva de un software como servicio (SaaS)<sup>9</sup>, es decir que la generación de un prototipo se realice de una forma ágil para una rápida retroalimentación entre el público objetivo al que se quiere llegar, bajo esta filosofía de trabajo se llegó al siguiente resultado desplegado en una red de transmisión digital DVB-T (ver figura 19 y 20):



Fuente: El autor.

**Figura 19.** Aplicación interactiva, demostración de contenido educativo asociado a contenido televisivo.



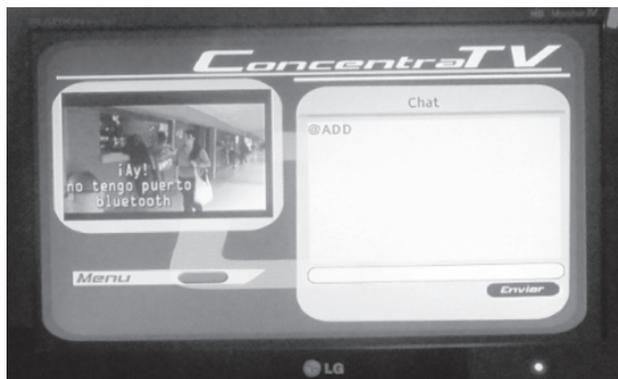
Fuente: El autor.

**Figura 20.** Aplicación interactiva, demostración de contenido educativo asociado a contenido televisivo.

Por otro lado se programó un chat que interactuará con otras plataformas como la web y los dispositivos móviles (ver figura 21).

Como el énfasis en primera instancia fue la implementación en un sistema de televisión digital interactiva se hizo el análisis mas riguroso al impacto que se tenía sobre dicha red de transmisión y retorno, mas sin embargo se logro también programar un módulo de un curso virtual que también funciona en dispositivos móviles y navegadores web bajo el paradigma de OVA<sup>10</sup> (ver figura 22 y 23).

El corazón central para el presente desarrollo fue el consumo de servicios por medio de tecnología JAVA, es decir que desde la capa de aplicación se programaron Servlets con la capacidad de conexión a una base de datos en



Fuente: El autor

**Figura 21.** Aplicación interactiva, demostración del modulo de chat desde la aplicación en televisión digital.



Fuente: El autor.

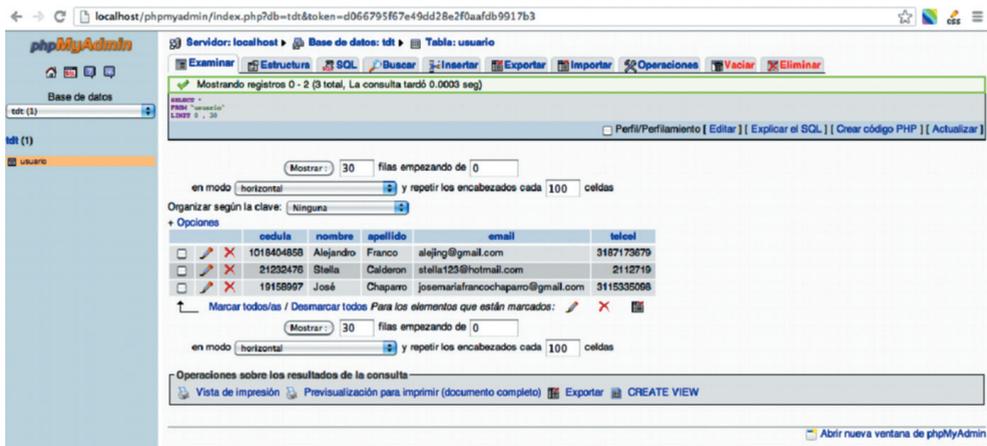
**Figura 22.** Aplicación interactiva, demostración de contenido educativo OVA para ser embebido en la web.



Fuente: El autor.

**Figura 23.** Aplicación interactiva, demostración de contenido educativo OVA desarrollado en un dispositivo móvil.

MySQL, esto haciendo referencia al modelo vista controlador (MVC) bajo el cual interactúan los clientes con los servidores (ver figura 24).



Fuente: El autor.

**Figura 24.** Registro de usuarios que han ingresado a la aplicación, vista desde el servidor Apache Tomcat y PhpMyAdmin.

Las tablas 1 y 2 relacionan los distintos tamaños asociados al peso de la aplicación desde la salida del modulador de televisión digital con relación a los tiempos de descarga de la misma en los decodificadores.

## Decodificador, STB (set-top-box) iCan 3810T

**Tabla 1.** Peso aplicación vs. tiempo descarga STB

Número de prueba	Peso aplicación entrada (Mb)	Tiempo de descarga en STB (segundos)
1	0,1	1,5
2	0,3	2,8
3	0,6	3,3
4	0,8	3,9
5	1,0	4,8

## Decodificador, STB (set-top-box) Telesystem TS 7000

**Tabla 2.** Peso aplicación vs. Tiempo descarga STB

Número de prueba	Peso aplicación entrada (Mb)	Tiempo de descarga en STB (segundos)
1	0,1	1,9
2	0,3	3,1
3	0,6	3,7
4	0,8	4,5
5	1,0	6,4

Por último se analizó los tiempos de respuesta de la aplicación con respecto al consumo de información con el web service, en este punto cabe resaltar que las pruebas sobre canal de retorno se hicieron en el decodificador iCan 3810T debido a que este implementa el protocolo TCP/IP por medio de conexión ethernet, situación distinta al tipo de protocolo que usaba el decodificador Telesystem TS7000 quien implementaba un medio de conexión por modem telefónico conmutado, no disponible en el momento de hacer las pruebas, así que la tabla 3 solo indica la respuesta de un decodificador.

## Decodificador, STB (set-top-box) iCan 3810T

**Tabla 3.** Peso aplicación vs. Tiempo consume web service desde STB.

Número de Prueba	Peso aplicación entrada (Mb)	Tiempo de consumo web service desde el STB (Mili Segundos)
1	0,1	0,3
2	0,3	0,3
3	0,6	0,7
4	0,8	0,9
5	1,0	2,6

## IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A continuación se enuncian las conclusiones más relevantes y significativas con respecto a la implementación de proyecto.

El desarrollo de software aplicado a la televisión digital, adicionalmente que este coexista con otros ecosistemas como los dispositivos móviles y la web, pasaran a ser integraciones de tres capas, donde el corazón para el desarrollo de las aplicaciones estará dado por la buena programación desde el consumo de servicios y su interacción con sistema de almacenamiento de datos (servidores y bases de datos).

Se involucran distintas tecnologías en el desarrollo de proyectos aplicados a múltiples dispositivos, los cuales deberán ser abordados según el criterio de menor costo de programación.

Una aplicación interactiva para televisión digital pasa por la integración en la programación de entornos de desarrollo libres, privativos o la unión de los dos; para el proyecto se han unido los dos tipos de entorno de desarrollo para obtener los resultados mencionados.

Los diseños iconográficos, normas y referencias de estilo para una red de televisión digital terrestre (TDT) deberán ser abordadas según la aplicación a programar, mas sin embargo estas deberán ceñirse a las guía de estilo que cada operador de servicio predisponga para no afectar la capa audiovisual y la marca del canal.

Para realizar las pruebas de desarrollo de una aplicación interactiva para televisión digital terrestre (TDT) requiere una red de radiodifusión digital de pruebas; para este caso se uso una laboratorio funcional bajo el estándar DVB-T.

En un ecosistema de televisión digital terrestre (TDT) la aplicación interactiva y su correspondiente despliegue sobre una red broadcast dependerá exclusivamente del operador del servicio de la cabecera televisiva.

El comportamiento gráfico de las aplicaciones interactivas desde el punto de vista de los decodificadores (STB), pasará a un plano importante según la tecnología implementada en su fabricación, es decir, menor calidad tecnológica en la integración electrónica de un decodificador dará como resultado baja calidad en la experiencia de usuario final de la aplicación interactiva.

El peso de una aplicación interactiva alojada en el carrusel de objetos de un operador televisivo es determinante a la hora de garantizar calidad de servicio en

el despliegue de la misma, es decir, a mayor peso mayor tiempo de descarga de la aplicación en un decodificador y menos grata la experiencia de usuario final.

El peso de una aplicación interactiva con relación al consumo de servicios web para la manipulación de la misma, no muestra elementos contundentes referente al tiempo de respuesta en la pantalla de un televisor, esto es debido a que salimos del ecosistema radiodifundido y dependeremos ahora de nuestro proveedor de servicio a internet y al dueño del modelo de negocio de la aplicación.

## REFERENCIAS

1. SIMONETTA, J. *Televisión Digital Avanzada*. Ed. Artes gráficas del sur. Avellaneda - Argentina. Noviembre, 2002.
  2. FISCHER, W. *Tecnologías para la Radiodifusión Digital de Video y Audio - Una guía práctica para ingenieros*. Ed. Springer. Munich - Alemania. Febrero, 2003.
  3. PERIÓDICO DIGITAL EL SATÉLITE, RTVC y otros. CNTV aprueba estándar DVB-T2 para TDT en Colombia. (diciembre 2011). Recuperado en junio de 2012 de los sitios web <http://periodicoelsatelite.com/2011/12/colombia-cntv-tdt-aprueba-estandar-dvb-t2/> y <http://tdt.rtvco.gov.co/> y [http://www.rtvco.gov.co/?option=com\\_contrat&task=showcontrat&tip\\_o=3&id=185](http://www.rtvco.gov.co/?option=com_contrat&task=showcontrat&tip_o=3&id=185) y [http://www.sic.gov.co/en/c/document\\_library/get\\_file?uuid=b522251.8-adf2-464c-be5c-c166c5ce3c35&groupId=10157](http://www.sic.gov.co/en/c/document_library/get_file?uuid=b522251.8-adf2-464c-be5c-c166c5ce3c35&groupId=10157)
  4. IBRAHIM, KF. *Receptores de Televisión Digital*. Ed. Marco Combo (Boixareu Editores). Barcelona - España. Febrero, 2001.
  5. mhp.org. MHP and GEM Applications. (enero 2012). Recuperado en junio de 2012 del sitio web <http://www.mhp.org/applications.htm>
  6. rtve.es. *Manual de estilo medios digitales*. (febrero 2010). Recuperado en junio de 2012 del sitio web <http://manualdeestilo.rtve.es/>
- ANTENA RADIO INTERNACIONAL. *Manual de Estilo adaptado con autorización de Iberia Radio Televisión Internacional*. 2007. Consultado el enero de 2010 en el sitio web [http://www.enantenaradio.com/manual\\_de\\_estilo.html](http://www.enantenaradio.com/manual_de_estilo.html)
7. WEITZENFELD, A. *Ingeniería de Software orientada a objetos con UML, Java e internet*. Ed. Thomson. México D.F. Septiembre, 2004.
- PRESSMAN, RS. *Ingeniería de software un enfoque moderno*. Ed. Mc Graw Hill. México D.F. Febrero, 2002.
8. HIDALGO, MU. *La nueva televisión digital en el universo multimedia*. Ed. Universidad de Deusto. Marzo, 2008.

WIKIPEDIA. Entornos de desarrollo integrados. (2012). Recuperado en junio de 2012 del sitio web [http://es.wikipedia.org/wiki/Entorno\\_de\\_desarrollo\\_integrado](http://es.wikipedia.org/wiki/Entorno_de_desarrollo_integrado)

9. HUIDOBRO MOYA, JM. Tecnologías de telecomunicaciones.: Ed. Alfaomega. Junio, 2006.

GARCÍA CASTILLEJO, A. Televisión digital e integración ¿TV para todos?, Ed. Universidad Rey Juan Carlos. Septiembre de 2005.

SAN JUAN PÉREZ, A. La televisión digital: la televisión del futuro. Ed. Laverde ediciones. Mayo, 2005.

10. LÓPEZ, JC. Diseño Pedagógico de un programa educativo multimedial interactivo (PEMI). Ed. Ediciones de la U., 2011.



# TEOREMA DE CLASIFICACIÓN PARA 2-VARIEDADES

LEONARDO SOLANILLA\*, ÓSCAR PALACIO\*\*, GUSTAVO HERNÁNDEZ\*\*\*

Recibido: 25 de junio de 2013 / Aceptado: 30 de agosto de 2013

## RESUMEN

Estudiaremos métodos combinatorios que permitan la construcción de superficies compactas, esto con el fin de entender las mismas y así poder dar una demostración completa del teorema de clasificación topológica de superficies.

**Palabras y frases clave:** superficie, espacio topológico, espacio compacto, espacio conexo, superficie orientable, triangulación.

## ABSTRACT

We study combinatorial methods that allow the construction of compact surfaces, in order to understand it and be able to give a complete proof of classification theorem for topological surfaces.

**Keywords and phrases:** surface, topological space, compact space, connected space, orientable surface, triangulation.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de la clasificación topológica de variedades de  $n$  dimensionales consiste en generar una lista completa y sin repeticiones de  $n$  variedades. Es decir, cuando disponemos de una lista de  $n$ -variedades de manera que dos miembros de la lista no son homeomorfos, y dada una  $n$ -variedad cualquiera disponemos de un procedimiento para determinar a qué  $n$ -variedad de la lista es homeomorfa.

En este artículo se presenta la demostración completa del teorema de clasificación de las 2-variedades. Se trata de una demostración propia, aunque inspirada por algunos referentes contemporáneos. Además de la idea de la

---

\* Doctor en Matemáticas, profesor, Universidad del Tolima. Ibagué, Colombia. Correo electrónico: leonmsolc@ut.edu.co

\*\* Especialista en Matemáticas Avanzadas, profesor, Universidad Cooperativa de Colombia. Ibagué, Colombia. Correo electrónico: ojpalacio86@gmail.com

\*\*\* Especialista en Matemáticas Avanzadas, Estudiante de Maestría en Matemáticas, profesor Universidad de Ibagué. Ibagué, Colombia. Correo electrónico: alffergustavo@hotmail.com

combinatoria de las superficies, nos hemos basado en una generalización del célebre Teorema de la Curva de Jordan.

## 2. PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN

El problema de la clasificación de las superficies consiste en definir una noción de equivalencia entre las superficies y hacer una lista completa de representantes, de tal manera que cada superficie sea equivalente a un elemento de la lista. La equivalencia es, naturalmente, la noción de homeomorfismo.

## 3. CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES

Partimos de una familia finita de triángulos equiláteros cerrados disyuntos cuyos lados tienen igual longitud. Así, si  $T$  es uno de estos triángulos y  $\partial T$  su frontera, su interior se obtiene como  $\text{int}(T) = T - \partial T$ . Además, se asume que cada frontera  $\partial T$  posee una misma orientación prefijada. La idea para construir superficies consiste en pegar lados de los miembros de la familia. Como cada lado se puede recorrer en dos sentidos posibles, hay dos formas de pegar un lado sobre otro.

Formalmente, asignamos a cada lado una etiqueta y un elemento del conjunto  $\{+, -\}$ . Con ello, se define una relación de equivalencia en la familia de triángulos como sigue.

1. Cada punto de cada  $\text{int}(T)$  es equivalente a sí mismo.
2. Dos lados con la misma etiqueta se identifican.
3. El sentido de la identificación depende de los elementos  $+$  o  $-$  asignados a los lados que se pegan.

**Proposición 3.1.** *Sean una familia de triángulos, un conjunto de etiquetas, asignaciones de etiquetas y de signos  $+$ ,  $-$  a los lados. El cociente de la familia entre la relación de equivalencia anterior es un espacio de Hausdorff compacto.*

*Demostración.* Llamemos  $X$  al cociente. Como la aplicación cociente es continua,  $X$  es compacto. Sabemos que la condición de Hausdorff es más delicada. Basta probar que la aplicación cociente es cerrada, *v.* Munkres ([10], Lema 73.3). Para ello, consideramos un solo triángulo  $T$  con una aplicación cociente  $\pi: T \rightarrow X$ . El caso con más triángulos es similar. Basta mostrar que para cada conjunto cerrado  $C \subseteq T$ ,  $\pi^{-1}(\pi(C)) = C'$  es cerrado en  $T$ . Ahora bien,  $C'$  consta

de puntos de  $C$  y de puntos de  $T$  que se pegan a puntos de  $C$  por  $\pi$ . Estos puntos se caracterizan sencillamente. Para cada lado  $L$  de  $T$ ,  $C \cap L = C_L$  es un subespacio compacto de  $T$ . Si  $L_i$  es un lado de  $T$  que se pega con  $L$  por el homeomorfismo  $h_i : L_i \rightarrow L$ , el conjunto  $D_L = C' \cap L$  contiene al espacio  $h_i(C_{L_i})$ . Pero  $D_L$  es la unión de  $C_L$  con los espacios  $h_i(C_{L_i})$ , donde los  $L_i$  son los lados de  $T$  que se pegan a  $L$ . La unión es compacta y, por tanto, cerrada en  $L$  y en  $T$ . Finalmente  $C'$  es la unión del conjunto  $C$  y los conjuntos  $D_L$ , donde los  $L$  son los lados de  $T$ . Se concluye que  $C'$  es cerrado en  $T$ .

Notemos que, si el número total de lados de la familia de triángulos es  $n$ , este cociente queda determinado por un símbolo de la forma

$$e_1 s_1 e_2 s_2 \dots e_n s_n$$

donde  $e_i$  es la etiqueta asignada al lado  $i$  y  $s_i \in \{+, -\}$  es el signo asignado a dicho lado. Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 3.1** (Banda de Möbius). Consideremos los pares de triángulos de la Figura 1 junto con los símbolos  $a - e + c - c + b - f -$  y  $b + g + d - d + a - h -$  respectivamente. Con estos dos paralelogramos y el símbolo  $f - a - e + b - b + g + a - h -$  se obtiene la banda de Möbius.

Para garantizar que el cociente sea efectivamente una superficie, necesitamos precisar aún algunos puntos.

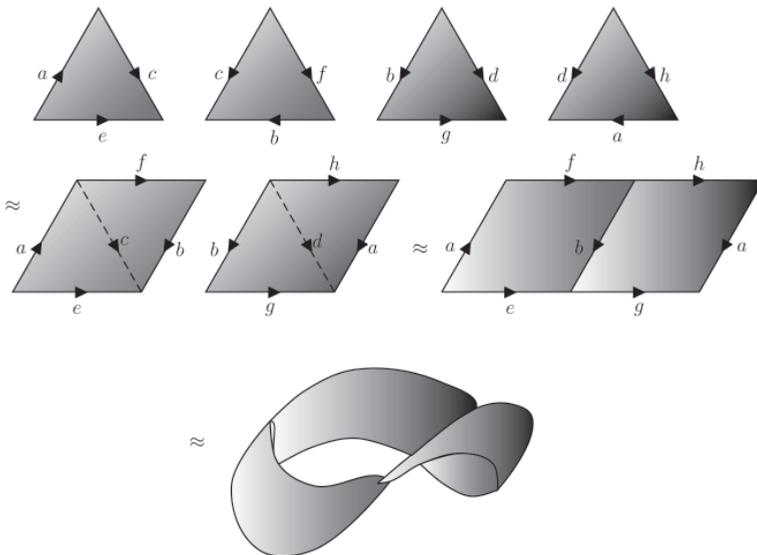


Figura 1. Banda de Möbius.

**Proposición 3.2.** *El espacio cociente obtenido en la Proposición 3.1 es una superficie si y solamente si se cumplen las condiciones adicionales siguientes.*

1. A cada etiqueta le corresponden exactamente dos lados (de triángulos distintos o del mismo triángulo).
2. Cada vértice en dicho cociente posee una vecindad homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ .
3. El cociente es conexo.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [14] Antes de proseguir, veamos algunos ejemplos de superficies.

**Ejemplo 3.2** (Plano proyectivo). *También se pueden obtener superficies no orientables. Los triángulos de la Figura 2 y el símbolo  $b + a + c - c + b + a +$  ilustran una manera de obtener el plano proyectivo. La confección de un "bonnet croisé", cf. Fréchet y Fan ([4], p. 48), en una esfera es tal vez la manera más sencilla entender esta superficie.*

Los ejemplos presentados ilustran dos técnicas geométricas básicas, a saber: el *pegado de triángulos* y el *corte de polígonos*. Iniciemos con el pegado de triángulos. Supongamos que tenemos dos triángulos equiláteros disjuntos

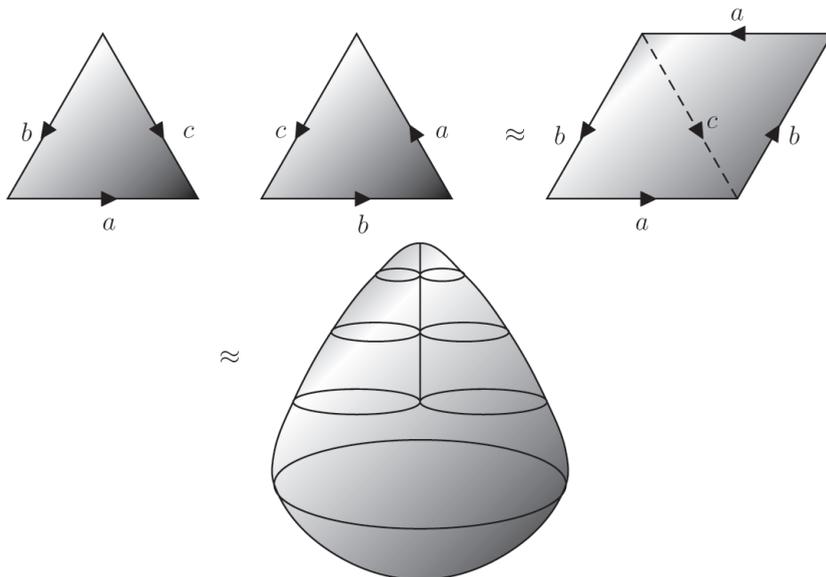


Figura 2. Plano proyectivo.

$T_1$  y  $T_2$ , con vértices sucesivos (orientación usual)  $\{v_1, v_2, v_3\}$  y  $\{u_1, u_2, u_3\}$  respectivamente. Construyamos el espacio cociente pegando la arista  $v_1v_3$  de  $T_1$  con la arista  $u_1u_3$  de  $T_2$ . De esta forma, obtenemos un espacio de Hausdorff compacto homeomorfo a un cuadrado. El proceso se puede generalizar a cualquier familia de triángulos equiláteros para construir cualquier polígono regular. Pasemos al proceso inverso. Sea  $P$  un polígono regular con vértices sucesivos  $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1} = p_1$  y centro  $c$ . Sean  $\{T_k : 1 \leq k : \leq n\}$  los triángulos de vértices sucesivos  $cp_1, p_2, cp_2, p_3, \dots, cp_n, p_1$  respectivamente. Ellos constituyen una división o corte de  $P$  en triángulos equiláteros. Por lo tanto, podemos cambiar los triángulos por polígonos regulares. Esta práctica es común en los textos sobre el tema, *v.e.g.* Munkres [10].

Se sigue del párrafo anterior que es posible obtener nuevas superficies a partir de cuadrados y demás polígonos regulares. En particular, esto agiliza la construcción de las sumas conexas. Por ejemplo, es posible pegar dos toros por los huecos que dejan partes conexas en cada uno de ellos. El detalle de la suma se presenta en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.3 (2-toro).** *Los polígonos de la Figura 3 con el símbolo  $b - a + b + a - f - f + c - d - c + d$  - producen la suma conexas de dos toros, una superficie que también se conoce con el nombre de 2-Toro.*

El procedimiento se puede generalizar inductivamente para obtener la suma conexas de un número finito cualquiera de toros.

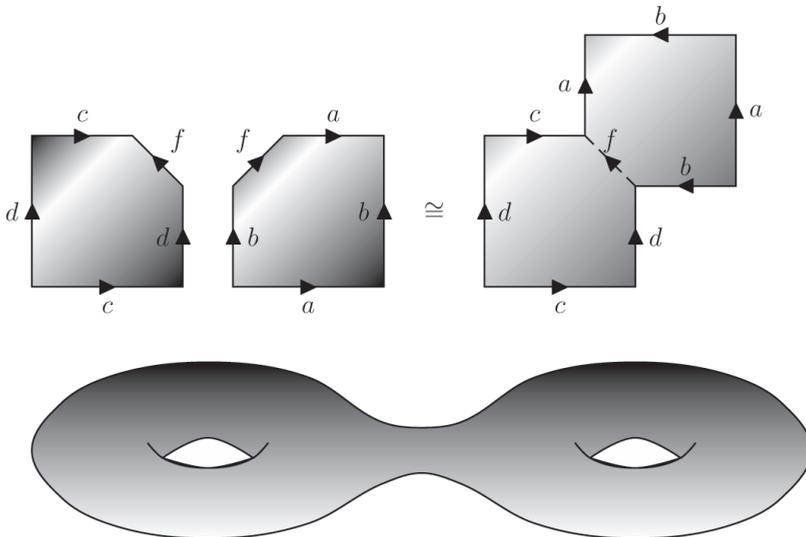


Figura 3. 2-Toro.

También es posible realizar sumas conexas de planos proyectivos.

Lo encontrado hasta el momento prueba que algunas superficies pueden construirse a partir de familias finitas de polígonos regulares y ciertos símbolos. En seguida, emprenderemos la labor de demostrar que todas las superficies se pueden obtener por este procedimiento.

#### 4. TRIANGULACIONES

La última proposición coincide, además, con la definición de triangulación de la geometría elemental, *v.e.g.* Stoker ([11], p. 212). Como alternativa, podemos caracterizar esta noción a partir de los fundamentos de la teoría de los grafos no dirigidos. Para ver la relación, notemos que la forma de pegar familias de triángulos en la Proposición 3.2 determina un grafo conexo cuyos vértices y lados coinciden con los de los triángulos. También se puede decir que el grafo se encaja topológicamente en la superficie. En este caso, decimos que este grafo es un triangulación de la superficie y que ella está triangulada. Asumiremos que la familia tiene al menos cuatro triángulos y que los lados del grafo no son múltiples.

**Lema 4.1.** *Si  $G$  es un grafo 2-conexo y  $H$  es un subgrafo 2-conexo de  $G$ , entonces  $G$  se puede obtener a partir de  $H$  por adiciones sucesivas de caminos de tal manera que cada uno de estos caminos junte 2 vértices distintos en el grafo intermedio y tenga todos los otros vértices fuera de dicho grafo.*

El ingrediente más importante para la demostración que nos ocupa es, sin embargo, la siguiente versión fuerte del Teorema de la Curva de Jordan, *v.* Thomassen ([12], p. 123).

**Teorema 4.1** (Jordan-Schönflies). *Si  $f: C \rightarrow C' +$  es un homeomorfismo entre dos curvas cerradas simples  $C$  y  $C'$  en el plano, entonces  $f$  puede extenderse a un homeomorfismo de todo el plano.*

Un grafo plano es un grafo encajado topológicamente en el plano euclidiano. También usaremos lo siguiente.

**Lema 4.2.** *Sean  $G, G'$  grafos planos 2-conexos,  $g$  un homeomorfismo e isomorfismo de grafos de  $G$  sobre  $G'$ . Entonces  $g$  puede extenderse a un homeomorfismo del plano.*

Con lo anterior enfrentamos el resultado central de esta sección.

**Teorema 4.2.** *Toda superficie es triangulable.*

*Demostración.* Hemos adaptado la prueba de Thomassen [12] a nuestra presentación, con mayor despliegue de detalles. Sea  $S$  una superficie. Sabemos que para cada  $p \in S$ , existe un disco abierto  $D$  del plano que es homeomorfo a una vecindad abierta  $U$  de  $p$  en  $S$  mediante una parametrización  $\psi : D \rightarrow U$ . En  $D$  es posible dibujar dos triángulos (cerrados)  $T_1$  y  $T_2$  tales que

$$p \in \text{int}(\psi(T_1)) \subset \text{int}(\psi(T_2)).$$

Como  $S$  es compacta, existen un conjunto finito  $\{p_1, \dots, p_n\}$  de puntos para los que se puede repetir la construcción anterior de tal suerte que

$$S = \bigcup_{k=1}^n \text{int}(\psi_k(T_{1k})).$$

No hay inconveniente alguno en suponer que los dominios  $D_1, \dots, D_n$  son fijos y disjuntos dos a dos en el plano. Lo que sí cambiaremos según convenga serán los homeomorfismos  $\psi_k, 1 \leq k \leq n$ , sus correspondientes recorridos  $U_k \subset S$  y los triángulos  $T_{1k}$ . En concreto, vamos a probar que los  $T_{11}, \dots, T_{1n}$ , resultantes de cierto procedimiento, producen el grafo buscado.

Basta con mostrar que cada subconjunto de dos elementos de

$$\left\{ \partial\psi_1(T_{11}), \dots, \partial\psi_n(T_{1n}) \right\},$$

tiene intersección finita. En este caso, el grafo  $G = \cup_{j=1}^n \partial\psi_j(T_{1j})$  tiene la propiedad de que cada componente conexo de  $S - G$  está encerrado por un cierto camino cerrado (o ciclo) en  $G$ . Para cada ciclo  $C$  de estos se puede construir un polígono regular convexo plano  $P$  cuyos vértices se correspondan con los vértices de  $C$ . Luego de dividir los polígonos en triángulos equiláteros e identificar los lados que correspondan, se obtiene una superficie  $S'$ . En virtud del Teorema 4.1,  $S$  y  $S'$  son homeomorfas. La Figura 4 puede ayudar a comprender este proceso.

El argumento se realiza por inducción suponiendo que  $T_{11}, \dots, T_{1(k-1)}$  han sido ya elegidos de tal forma que cada par de elementos de  $\{\partial\psi_j(T_{1j}) : 1 \leq j \leq k-1\}$  tengan intersección finita en  $S$ . Si  $\partial\psi_k(T_{1k})$  sigue teniendo intersección finita con aquellos, no hay nada que probar. Si no, tiene infinitos puntos en común con alguno de ellos. Consideremos la relación de  $\psi_k(T_{2k})$  con las imágenes respectivas de  $T_{11}, \dots, T_{1(k-1)}$ . Para ello, introducimos algunos conceptos útiles.

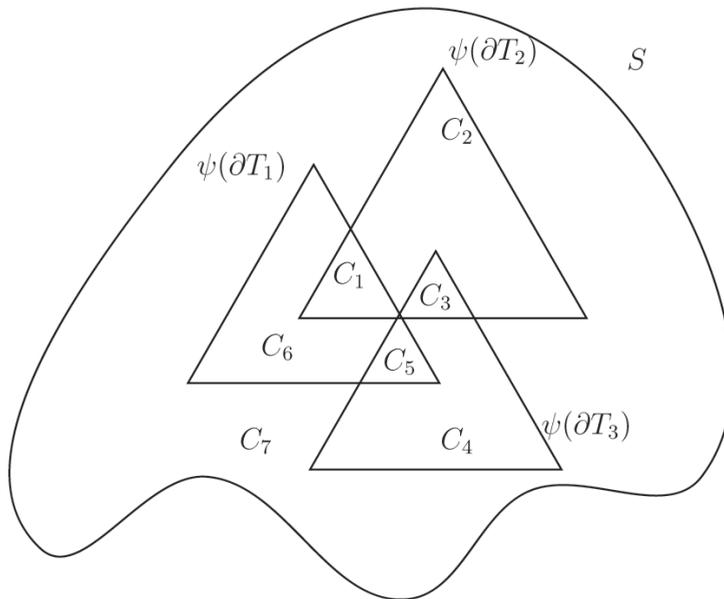


Figura 4. Las fronteras de los triángulos tienen intersección finita.

Un segmento *malo* (en el sentido de Thomassen) de  $\psi_j(T_{1j})$ ,  $1 \leq j \leq k - 1$  fijo, es

- un segmento de  $\psi_j(T_{1j})$  (es decir, la imagen bajo  $\psi_j$  de un segmento recto que une dos puntos de  $T_{1j}$ ) que, además,
- une dos puntos de  $\psi_k(\partial T_{2k})$  de tal suerte que todos los puntos restantes yacen en  $\text{int}(\psi_k(T_{2k}))$ .

Un segmento *pésimo* (en el sentido de Thomassen) de  $\psi_j(T_{1j})$ ,  $1 \leq j \leq k - 1$  fijo, es

- un segmento malo de  $\psi_j(T_{1j})$ , tal que
- existe un triángulo  $\psi_k(T_{3k})$  entre  $\psi_k(T_{1k})$  y  $\psi_k(T_{2k})$  que lo interseca, pero no interseca a ningún otro segmento malo de  $\psi_j(T_{1j})$ .

La Figura 5 sugiere la situación; en ella, los segmentos son rectos para facilitar el entendimiento. Al recorrer  $1 \leq j \leq k - 1$ , se encuentra que el conjunto total de segmentos malos puede ser infinito, mientras que el conjunto de segmentos pésimos es siempre finito. También, luego de recorrer los triángulos  $T_{11}, \dots, T_{1(k-1)}$ , se halla una región  $\psi_k(V_{3k})$ , encerrada por una curva poligonal cerrada simple, en  $\text{int}(\psi_k(T_{2k}))$  tal que  $\text{int}(\psi_k(T_{1k})) \subseteq \text{int}(\psi_k(V_{3k}))$ .

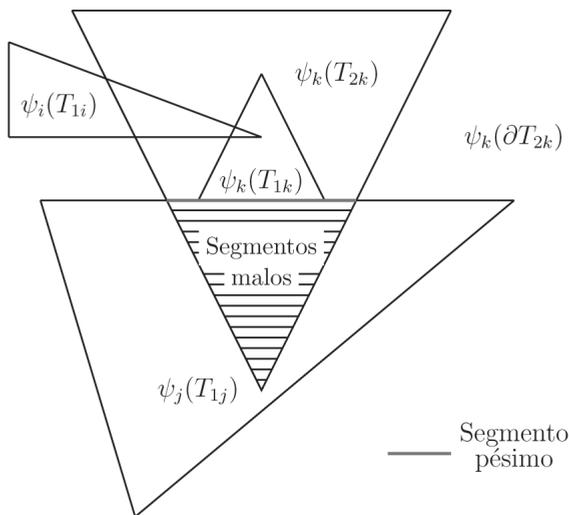


Figura 5. Segmentos malos y pésimos.

Dicha curva  $\partial\psi_k(V_{3k})$  interseca los segmentos pésimos pero no interseca los demás segmentos malos.

La unión de los segmentos pésimos con  $\partial\psi_k(T_{2k})$  forma un grafo 2-conexo  $\Gamma$ . Por el Lema 4.1, podemos reconstruir copias de  $\Gamma$  dentro de  $\psi_k(T_{2k})$  para obtener grafos  $\Gamma'$  (isomorfos planos con  $\Gamma$ , cuyos lados son arcos poligonales simples). Ahora aplicamos el Lema 4.2 para extender el isomorfismo plano de  $\Gamma$  sobre cierto  $\Gamma'$  en un homeomorfismo de  $\psi_k(T_{2k})$  que deja fijo a  $\partial\psi_k(T_{2k})$ ,  $v$ . Figura 6.

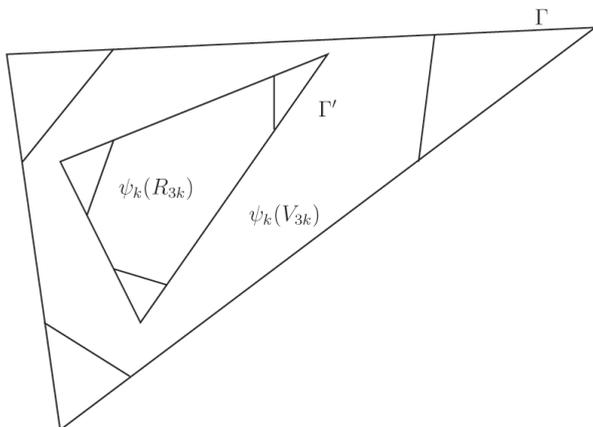


Figura 6. Remoción de los segmentos pésimos.

Mediante este homeomorfismo,  $\psi_k(T_{1k})$  y  $\psi_k(V_{3k})$  se convierten en regiones  $\psi_k(R_{1k})$  y  $\psi_k(R_{3k})$ , encerradas por curvas cerradas simples. También, se tiene que  $p_k \in \text{int}(\psi_k(R_{1k})) \subseteq \text{int}(\psi_k(R_{3k}))$ . Para terminar el proceso inductivo, se toma (una parte triangular de)  $\psi_k(R_{3k})$  en lugar de  $\psi_k(T_{1k})$ . Con esto, los subconjuntos binarios de  $\{\psi_1(\partial T_{11}), \dots, \psi_k(\partial T_{1k})\}$  tienen intersección finita.

## 5. CLASIFICACIÓN

Con lo anterior queda claro que toda superficie es homeomorfa a una obtenida como un cociente de un conjunto finito de triángulos según un símbolo, de acuerdo con las normas explicadas antes. De esta forma, el problema de clasificación de todas las superficies se reduce a la clasificación de las superficies trianguladas. Veamos.

**Proposición 5.1.** *Sea  $S$  la superficie obtenida de una familia de  $m$  polígonos según el símbolo inicial  $t_0 + t_1 + w_2 + \dots + w_m$ . Si  $e$  es una nueva etiqueta y  $t_0^+$ ,  $t_1^+$  constan de al menos dos segmentos, entonces  $S$  se puede reconstruir a partir de los de  $m+1$  polígonos según el nuevo símbolo  $t_0 + e - e + t_1 + w_2 + \dots + w_m$ . Recíprocamente, si  $S$  se obtiene como el cociente de  $m + 1$  polígonos por el nuevo símbolo, también se puede obtener de  $m$  polígonos mediante el símbolo inicial, donde  $e$  es una etiqueta diferente a las que aparecen en dicho símbolo inicial.*

Esta proposición muestra solamente una de las operaciones básicas que se pueden realizar en una familia de polígonos y que no cambian la superficie resultante  $S$ . Tal como uno quisiera, ellas se pueden definir por medio de los símbolos. He aquí la lista de dichas operaciones. Todas ellas son reversibles.

1. *Cortar.* El símbolo  $w_1 + = t_0 + t_1 +$  se puede remplazar por  $t_0 + e - e + t_1 +$  siempre y cuando  $e$  sea una nueva etiqueta y  $t_0^+$  y  $t_1^+$  contengan al menos dos segmentos.
2. *Pegar.* El símbolo  $t_0 + e - e + t_1 +$  se pueden cambiar por  $t_0 + t_1 +$  cuando  $e$  no aparezca en ningún otro símbolo.
3. *Reetiquetar.* Se pueden cambiar todas la apariciones de una etiqueta por otra etiqueta y viceversa.
4. *Reorientar.* Se puede sustituir  $+$  por  $-$  y viceversa en todas las apariciones de una etiqueta.
5. *Permutar (cíclicamente).* Cualquier  $w_i +$  se puede remplazar por una de las permutaciones cíclicas de sus elementos.

6. *Invertir.*  $w_i^+ = a_{i1} + \dots a_{in}^+$  se puede cambiar por su inverso  $w_i^- = a_{in} - \dots a_{i1}^-$ .

Lo anterior nos conduce a establecer algunas nociones clave. Dos símbolos sobre familias de polígonos son equivalentes si uno de ellos se puede obtener a partir del otro por medio de una sucesión finita de las operaciones básicas 1 a 7. No es difícil ver que se trata efectivamente de una relación de equivalencia en el conjunto de símbolos de superficies. También, dos superficies son homeomorfas si y sólo si las clases de equivalencia de sus símbolos coinciden. La siguiente proposición muestra la utilidad de este resultado.

**Proposición 5.2.** *La botella de Klein es homeomorfa al 2-plano proyectivo.*

*Demostración.* Es suficiente mostrar que el símbolo  $a + b + a - b^+$  de la botella de Klein es equivalente al símbolo  $a + a + b + b^+$  del 2-plano proyectivo.

Un símbolo  $w^+ = w_1 + w_2 + \dots w_m^+$  para una familia de polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  es propio si cada etiqueta aparece solamente dos veces en él. Claramente, los símbolos que estamos considerando son propios, pues producen superficies. Después de mirar en detalle los ejemplos realizados hasta ahora, se puede llegar a clasificar los símbolos de las superficies orientables y no orientables según sus símbolos, tal como se explica en breve. Además, es suficiente con considerar un único polígono  $P$ , en lugar de una familia.

**Definición 5.1.** *Sea  $w^+$  un símbolo propio para un polígono  $P$ . Decimos que  $w^+$  es tórico si cada etiqueta aparece una vez junto al signo  $+$  y una vez junto al signo  $-$ . Decimos  $w^+$  que es proyectivo, si no es tórico.*

Estas dos opciones son excluyentes y cubren todos los casos posibles en la construcción de superficies. Una primera explicación de lo que pasa en el segundo caso queda resuelta por lo que sigue.

**Lema 5.1.** *Si  $w^+$  es un símbolo proyectivo para un polígono  $P$ , entonces equivale a uno del mismo número de elementos y de la forma*

$$(a_1 + a_1^+) (a_2 + a_2^+) \dots (a_k + a_k^+) w_1^+,$$

para cierto  $k \geq 1$ , donde  $w_1^+$  es vacío o tórico. Los paréntesis son una ayuda para la vista.

De esta manera, un símbolo que produce una superficie es ya tórico, ya de la forma  $(a_1 + a_1^+) (a_2 + a_2^+) \dots (a_k + a_k^+)$  o ya de la forma  $(a_1 + a_1^+) (a_2 + a_2^+) \dots (a_k + a_k^+) w_1^+$ ,  $w_1^+$  tórico. Claramente, el segundo caso es una suma conexa de planos proyectivos. El primer caso (puramente tórico) y el tercero se resuelven

respectivamente por medio de los siguientes lemas, cuyas demostraciones son del mismo talante de la anterior. Diremos que un símbolo tórico está reducido cuando todas las ocurrencias  $x - x^+$ , para cierta etiqueta  $x$ , han sido eliminadas por la operación de pegado.

**Lema 5.2.** Si  $w^+$  es propio de la forma  $w_0 + w_1^+$ , donde  $w_1^+$  es tórico reducido, entonces  $w^+$  es equivalente a un símbolo de la forma  $w_0 + a + b + a - b - w_2^+$ , donde  $w_2^+$  es vacío o tórico. Además,  $a + b + a - b - w_2^+$  tiene tantos elementos como  $w_1^+$ .

**Lema 5.3.** Si  $w^+$  es un símbolo propio de la forma  $w_0 + c + c + a + b + a - b - w_1^+$ , entonces  $w^+$  es equivalente a uno de la forma  $w_0 + a + a + b + b + c + c + w_1^+$ .

Con esto, tenemos a la mano todos los elementos para culminar nuestro propósito.

## 6. CONCLUSIÓN

**Teorema 6.1** (de Clasificación). Sea  $S$  una superficie cociente obtenida pegando lados de un polígono regular. Entonces,  $S$  es homeomorfa bien sea a la esfera, bien a un  $n$ -toro, bien al plano proyectivo, bien a un  $m$ -plano proyectivo.

*Demostración.* Sea  $w^+$  el símbolo de al menos cuatro etiquetas que produce  $S$ . Probaremos que  $w^+$  pertenece a una de las clases de equivalencia siguientes.

1.  $a + a - b + b^-$  (esfera),
2.  $a + b + a + b^+$  (plano proyectivo),
3.  $(a_1 + a_1^+) (a_2 + a_2^+) \dots (a_m + a_m^+)$ ,  $m \geq 2$  ( $m$ -plano proyectivo),
4.  $(a_1 + b_1 + a_1 - b_1^-) (a_2 + b_2 + a_2 - b_2^-) \dots (a_n + b_n + a_n - b_n^-)$ ,  $n \geq 1$  ( $n$ -toro).

Supongamos que  $w^+$  es tórico. Si  $w^+$  tiene cuatro etiquetas, es de la forma  $a + a - b + b^-$  o de la forma  $a + b + a - b^-$ . El primero es de la forma (1) y el segundo de la forma (4). Continuemos ahora por inducción sobre el número de etiquetas. Supongamos que  $w^+$  tiene más de cuatro etiquetas y está reducido. El Lema 5.2, con  $w_0^+ = \emptyset$ , implica que  $w^+$  es equivalente a un símbolo igual de largo de la forma  $w_2 = a + b + a - b - w_3^+$ . Además,  $w_3^+$  es diferente de vacío ( $w^+$  tiene más de cuatro etiquetas) y es tórico reducido. Aplicando reiteradas veces el mismo procedimiento obtenemos un símbolo de la forma (4).

Si  $w^+$  es proyectivo y contiene cuatro etiquetas, el Lema 5.1 asegura que  $w^+$  se puede escribir como  $a + a + b + b^+$  o como  $a + a + b - b^+$ . El primero es de la forma (3). El segundo, mediante  $t_1^+ = t_2^+ = b^+$ , se vuelve  $a + a + t_1 - t_2^+$ . Por los argumentos usados en la demostración del Lema 5.1, el símbolo se convierte

en  $a + t_1 + a + t_2 + = a + b + a + b +$ . Es decir, es de la forma (2). Si  $w +$  tiene más de cuatro etiquetas, el Lema 5.1 garantiza que  $w +$  es equivalente a cierto  $w' + = a_1 + a_1 + \dots a_k + a_k + w_1 +$  con  $k > 1$  y  $w_1 +$  tórico. Si éste último es vacío, logramos la forma (3). Si no es vacío, puede tener términos adyacentes con la misma etiqueta. Así,  $w' +$  es equivalente a un símbolo proyectivo más corto y simplemente usamos la hipótesis de inducción. Si  $w' +$  ya está reducido, el Lema 5.2 arroja que es equivalente a cierto  $w'' + = a_1 + a_1 + \dots a_k + a_k + a + b + a - b - w_2 +$ , donde  $w_2 +$  es vacío o tórico. Luego, por el Lema 5.3,  $w'' +$  es equivalente a algún  $a_1 + a_1 + \dots a_k + a_k + a + a + b + b + w_2$ .

Aplicando varias veces este procedimiento se consigue un símbolo de la forma (3).

## REFERENCIAS

- 1 BREDON, G.E. *Topology and Geometry*. Springer, New York, 1993.
- 2 Euclides. *The Thirteen Books of the Elements, Vol. 1 (Books I and II)*. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Second Edition Unabridged. Dover Publications, Inc. New York, 1956.
- 3 FRALEIGH, J. B. *Álgebra abstracta, primer curso*. Addison-Wesley Iberoamericana, México, D. F., 1988.
- 4 FRÉCHET, M. et FAN, K. *Introduction à la Topologie Combinatoire, I Initiation*. Librairie Vuibert, Paris, 1946.
- 5 HATCHER, A. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. Cornell University, USA, 2000.
- 6 HAYEK, H. y RIVERA, J.G. *Cálculo cuaterniónico*. Trabajo de Grado, Matemáticas con énfasis en Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, 2010.
- 7 MALLIAVIN, P. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Hermann, Paris, 1972.
- 8 MASSEY, W.S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- 9 MIRANDA, E. *Grupos finitos, ecuaciones algebraicas*. Notas de clase, 2010/2011.
- 10 MUNKRES, J.R. *Topología*. Segunda edición. Prentice-Hall, Madrid, 2002. Traducida de *Topology*. 2nd ed. Prentice-Hall, Inc., 2000.
- 11 STOKER, J.J. *Differential Geometry*. Wiley-Interscience, New York, 1969.
- 12 THOMASSEN, C. *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces*. American Mathematical Monthly, 99 (2), 116-131, 1992.

- 13 TRIMARCO, G. R. *Estructura delta y homología de algunas variedades compactas de dimensión 3*. Seminario para acceder al título de Licenciado en Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán, 2009.
- 14 HERNÁNDEZ, Gustavo y PALACIO, Oscar J. *Hacia la clasificación de la 3-variedad*. Ibagué, Colombia. Trabajo de Grado, Especialización en Matemáticas Avanzadas, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, 2012.

# ESTADO DEL ARTE DE LA (IN)SEGURIDAD VOIP

JOHN ALEXANDER RICO FRANCO\*

*Recibido: 12 de junio de 2013 / Aceptado: 25 de julio de 2013*

## RESUMEN

La telefonía basada en el protocolo IP (VoIP) es el concepto tecnológico que comprende a todos los mecanismos necesarios para lograr realizar llamadas telefónicas y/o sesiones de videoconferencia a través de redes de datos, permitiendo servicios de telefonía a costos mínimos y de fácil implementación e integración con la red de datos propia de cualquier empresa; y es por estas características que los productos VoIP han tenido una muy rápida y amplia aceptación en todo rango de empresas, uso doméstico y otros ambientes que requieren de soluciones de telefonía, pero debido a la concepción de la telefonía como mecanismo seguro de transmisión de información y la visión sesgada de que los mecanismos de seguridad son solo gastos innecesarios o que son procesos engorrosos que disminuyen la facilidad de uso de cualquier tecnología, se pueden llegar a implementar de manera muy insegura o con poca preocupación en este rubro, soluciones VoIP vulnerables y con resultados catastróficos en el manejo de información sensible compartida en conversaciones telefónicas confidenciales.

El presente artículo busca presentar los conceptos y conclusiones que han sido resultado de un proyecto de investigación basado en descubrir y detectar cuales son los grandes inconvenientes que acechan a la tecnología VoIP y encontrar cuales son las soluciones más innovadoras que esta presentando la comunidad de la seguridad de la información a nivel global; para así lograr concientizar a los profesionales de la seguridad y a cualquier actor implicado en una solución VoIP que aparte de los beneficios propios de este tipo de tecnología, esta viene de la mano con vulnerabilidades y problemas de seguridad que hay que tener en cuenta y que son comunes en cualquier tipo de tecnología emergente; pero que a su vez no todo el panorama es sombrío y que existen soluciones de seguridad VoIP que garantizan la integridad, disponibilidad y confidencialidad de la información que circula en forma de voz y/o video en las redes VoIP.

**Palabras clave:** VoIP, SIP, H323, H.235, RTP, SRTP, gestor de llamadas, terminales VoIP suplantación, espionaje, denegación del servicio (DoS), fuzzing, señalización, seguridad.

## ABSTRACT

Voice over Internet Protocol (VoIP) is the technology concept that includes all the necessary mechanisms for making phone calls and video conferencing sessions through

---

\* Ingeniero de Sistemas. Especialista en Seguridad de Redes de la Universidad Católica de Colombia, con más de 5 años de experiencia como consultor independiente en proyectos referentes a temas de seguridad informática, criptografía y realización de pruebas de calidad de software. Catedrático Universitario y Docente Investigador del Grupo de Investigación y Desarrollo de Ingeniería de Sistemas (G.I.D.I.S) de la Corporación Universitaria Republicana.

data networks; allowing telephony services at minimal costs with an easy structure implementation and simple integration with any company data network; and is for these unique features that the VoIP products have a very fast and wide acceptance in whole range of companies, local telephony deployments and other environments that requires telephony solutions, but due to the widespread idea that the phone service is a secure way of transmitting information and the biased view by some employees indicating the security mechanisms are just unnecessary expenses or cumbersome processes that decrease the ease use of any technology may limit some developments of VoIP solutions and the vulnerable VoIP networks can generate catastrophic results in managing of sensitive shared information which is transmitted on confidential telephone conversations.

This article pretend to present the concepts and conclusions which have been the result of a research project based on discovering and detecting the major drawbacks and weaknesses proper the VoIP technology and find out which are the most innovative security solutions that are presenting by the international research community of matters related to information security; and this is for generate awareness among security professionals and any player involved in a VoIP solution that apart from the profits of this technology there are serious security problems and vulnerabilities that must be taken into account and that are common in any type of emerging technology; but dear reader should keep in mind that not all the scene is dark and there are VoIP security solutions that ensure the integrity, availability and confidentiality of the information circulating in the form of voice and / or video in VoIP networks.

**Keywords:** VoIP, SIP, H323, H.235, RTP, SRTP, Call manager, VoIP terminals, impersonation, wiretapping, denial of service (DoS), fuzzing, data signaling, information security.

## INTRODUCCIÓN

La percepción sobre la idea de la seguridad informática, ha estado en boga a nivel empresarial en los últimos años y se ha convertido en una necesidad, más que en un compromiso, frente a una tendencia competitiva cada vez mas enfocada al uso de nuevas tecnologías y por ende a mejorar su participación en la Internet; pero esto ha abierto las puertas a un nuevo enemigo, el atacante informático, que busca aprovecharse de la falta de robustez de seguridad de las tecnologías emergentes, de las vulnerabilidades propias de cualquier nuevo proceso de comunicación y de la poca concientización de los usuarios de lo importante que es la información; para así lograr afectar de manera negativa a cualquier empresa a nivel internacional sin mucho esfuerzo o conocimiento técnico. Y si a lo anterior, lo contextualizamos en una época como lo es la actual, en donde todas las grandes organizaciones están extendiendo el uso de redes VoIP (Voice Over Internet Protocol) como mecanismo potenciador de su infraestructura de comunicaciones y también como fuente de reducción de costos. Pero no se está teniendo en cuenta que el ambiente de riesgos asociados a las redes VoIP, se encuentra en constante incremento, ya que los atacantes han descubierto que este ambiente es muy propicio para poder recolectar información empresarial de manera fácil y efectiva.

Así que el fin de este artículo es poder exhibir a cualquier lector interesado, un escrito enfocado a exponer las vulnerabilidades de la redes VoIP; que en la actualidad son una gran fuente de información sensible que un atacante puede adquirir y comprender de manera muy fácil, y también se busca el poder presentar cuales son algunas de las mas nuevas e innovadoras tendencias en seguridad VoIP; las cuales pueden llegar a ser fuente de inspiración de nuevas tecnologías de seguridad o llegar a ser base para proteger la información compartida sobre este tipo de redes en cualquier empresa interesada.

## ¿QUÉ ES LA VOIP?

Para poder iniciar de la mejor manera el estudio sobre la seguridad en la telefonía sobre el protocolo de Internet (VoIP) hay que conocer que es la VoIP; así que se inicia explicando que la tecnología de voz sobre el protocolo IP, se refiere a el concepto tecnológico que engloba las metodologías, tecnologías, protocolos de comunicación y técnicas de transmisión que se utilizan para la distribución de sesiones de video (videoconferencias) y de comunicaciones de voz a través de redes basadas en el protocolo de Internet (IP), esto quiere decir que se envía la señal de voz y/o video en forma digital en paquetes de datos, en lugar de enviarla en forma análoga a través de los circuitos cableados que son exclusivos de la telefonía convencional, como lo son las redes PSTN (Public Switched Telephone Network); así que bajo este concepto hay que tener en claro que los datos de voz y video bajo la tecnología VoIP, viajan en redes de propósito general y que están basadas en paquetes en vez de la típica línea telefónica basada en circuitos.

Una de las ventajas de la tecnología VoIP es que se permite controlar el tráfico de la red, por lo que se disminuyen las posibilidades de que se produzcan caídas importantes en el rendimiento del servicio telefónico; además es independiente del tipo de red física que lo soporta, permitiendo así la integración con las grandes redes de datos actuales.

En lo referente al concepto de seguridad en redes VoIP, aun es deficiente; debido a que los protocolos y codecs utilizados son parcialmente nuevos y por ende vulnerables, permitiendo así a un agresor poder realizar ataques de denegación de servicio, grabar conversaciones y/o acceder a buzones de voz de manera relativamente fácil; lo cual puede comprometer de manera alarmante la información sensible de una compañía.

Ahora, un aspecto que hay que tener muy presente al momento de analizar que es la VoIP, es que los protocolos VoIP son los que permiten a dos o más dispositivos transmitir y recibir audio y/o video en tiempo real, lo cual es la

base que permite soportar el servicio de llamadas bajo el protocolo IP y que los protocolos más altamente utilizados al momento de generar soluciones de VoIP son el Protocolo de Inicio de Sesión (SIP - Session Initiation Protocol) y la familia de protocolos H.323; pero existen distintas configuraciones entre protocolos y elementos de red, que pueden ser utilizados en la implementación de una solución VoIP, lo cual genera confusión y permite a cualquier atacante aprovecharse de esta falta de regulación; así que por esto exhibimos cuales son los elementos básicos de una solución VoIP; en lo que refiere a dispositivos de red, son dos los dispositivos fundamentales:

- **Terminales:** Un teléfono VoIP o terminal VoIP es el dispositivo utilizado para iniciar y recibir llamadas; y es el tipo de terminal llamado Softphone el que es más utilizado al momento de implementar una solución VoIP, ya que este es una herramienta VoIP basada en software que permite a cualquier computador de escritorio o teléfono de inteligente poder realizar y/o recibir llamadas VoIP; esta es una solución muy práctica y de bajo costo para implementación de terminales VoIP, pero puede ser fácilmente atacada por cualquier usuario mal intencionado, puesto que al ser una herramienta basada en software, puede ser transgredida mediante diferentes técnicas de ataque que se basan en las vulnerabilidades propias de cualquier solución de esta índole.
- **Gestor de Llamadas (Call Manager):** Este dispositivo de tipo servidor, es el encargado de identificar y encontrar las diferentes terminales de una infraestructura VoIP al momento de gestionar una llamada telefónica; en pocas palabras este es el encargado de proporcionar las funcionalidades de una central telefónica (PBX) a cualquier solución VoIP y además es el responsable de la autenticación de los usuarios que interactúan con la red VoIP. Este es el dispositivo que más ataques recibe al momento de tratar de comprometer una solución de VoIP, ya que si un atacante logra controlar y/o engañar al gestor de llamadas, puede desde hacerse pasar por un usuario legítimo de la red VoIP hasta escuchar llamadas privadas entre los usuarios de la solución VoIP, pudiendo así comprometer la integridad y confidencialidad de dichas llamadas telefónicas.

Ya habiendo visto cuales son los dos dispositivos de red VoIP básicos, pasamos a ver los protocolos VoIP que más ampliamente son utilizados al momento de generar una solución VoIP.

#### A. SIP (Session Initiation Protocol - Protocolo de Inicio de Sesión)

El Protocolo de Inicio de Sesión o SIP, fue estandarizado por el Internet Engineering Task Force (IETF) y es el protocolo genérico de cualquier solu-

ción VoIP, ya que es considerado en la actualidad como el estándar para señalización multimedia (video y audio) en redes IP, puesto que este fue diseñado para soportar cualquier clase de sesión de comunicación bidireccional y esto incluye a las llamadas VoIP, tal como se especifica en el RFC 3261<sup>1</sup>. Su funcionamiento es muy básico al ser un protocolo genérico, en si lo que hace este es gestionar todas las solicitudes que son enviadas al servidor SIP (gestor de llamadas) por los distintos clientes SIP (terminales), entonces el servidor SIP procesa dichas solicitudes de comunicación y las responde a los clientes SIP, enviando los respectivos mensajes de respuesta SIP; pero a diferencia de los demás protocolos IP, las implementaciones VoIP deben estar instaladas tanto en el cliente SIP como en el servidor SIP, para que así cualquiera de las dos partes pueda iniciar o finalizar las llamadas IP; este mecanismo de funcionamiento se detalla en la figura 1.

Tal como se puede observar, la arquitectura SIP maneja un diseño muy parecido al modelo transaccional de solicitud/respuesta de HTTP; puesto que en ambos modelos su transacción consta en una solicitud de un cliente o usuario que invoca a un método en particular o función específica del servidor y este responde a el cliente de acuerdo a la respuesta dada por el método o función ejecutada. El protocolo SIP reutiliza la mayoría de campos de cabecera y reglas de codificación de HTTP, lo cual hace que su funcionamiento sea fluido en cualquier red basada en protocolo IP, pero lo hace muy sensible a ataques basados tanto en vulnerabilidades del protocolo SIP como en las del protocolo HTTP.

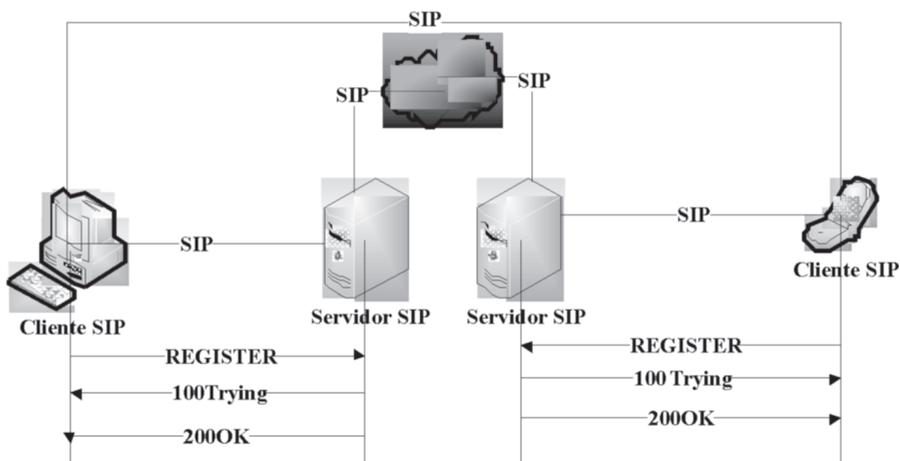


Figura 1. Arquitectura SIP<sup>2</sup>

1 H. SCHULZRINNE, E. SCHOOLER Y J. ROSENBERG; «SIP: Session Initiation Protocol» RFC 3261, 2002.

2 *Ibíd.*

## B. H323

La familia de protocolos H.323 fue presentada por el ITU Telecommunication Standardization Sector (ITU-T) como mecanismo para proveer sesiones de comunicación audio – visual sobre cualquier red basada en paquetes y ha sido ampliamente adoptada por el sector empresarial debido a su fácil integración a las redes de telefonía tradicional PSTN (Public Switched Telephone Network), ya que el protocolo H.323 es un protocolo binario lo cual se acopla perfectamente a la lógica de funcionamiento de las redes PSTN. Los protocolos que son el núcleo de la familia H.323 son los siguientes:

**H.225 (RAS):** Este protocolo permite el registro, admisión y estatus de la comunicación entre los agentes H.323 (terminales) y el servidor de llamadas H.323 (gestor de llamadas), y es este protocolo encargado de proveer la resolución de direcciones y los servicios de control de admisión a la red VoIP.

**H.225:** Es el encargado de realizar el proceso de señalización de las llamadas y este es implementado entre los agentes H.323 (terminales).

**H.245:** Es el protocolo que esta comisionado para el control de la comunicación multimedia, ya que este es el que describe los mensajes y procedimientos que son utilizados para el establecimiento y clausura de canales lógicos de comunicación de audio, video y datos, junto con sus controles e indicadores.

**Protocolo de Transmisión en tiempo Real (RTP):** Es el protocolo utilizado para enviar y recibir información multimedia (video, voz y texto) entre agentes H.323.

En la figura 3 veremos el funcionamiento a grosso modo del protocolo H.323.

## LOS ABISMOS DE LA SEGURIDAD GENERADOS POR LA VOIP

La mayoría de los usuarios no técnicos de las redes telefónicas que se basan en el protocolo de Internet; que casi siempre son los que toman las decisiones al momento en invertir en tecnología más por costos que por seguridad o calidad del servicio; manejan un concepto erróneo de una seguridad implícita sobre el manejo de la información que comunica mediante llamadas telefónicas vía VoIP, ya que estos usuarios están seguros de que la información está llegando de manera segura al destinatario que ellos desean y que no existe nadie más «escuchando» dicha comunicación; pero hay que aclarar que esta manta de seguridad fue adquirida por dichos usuarios debi-

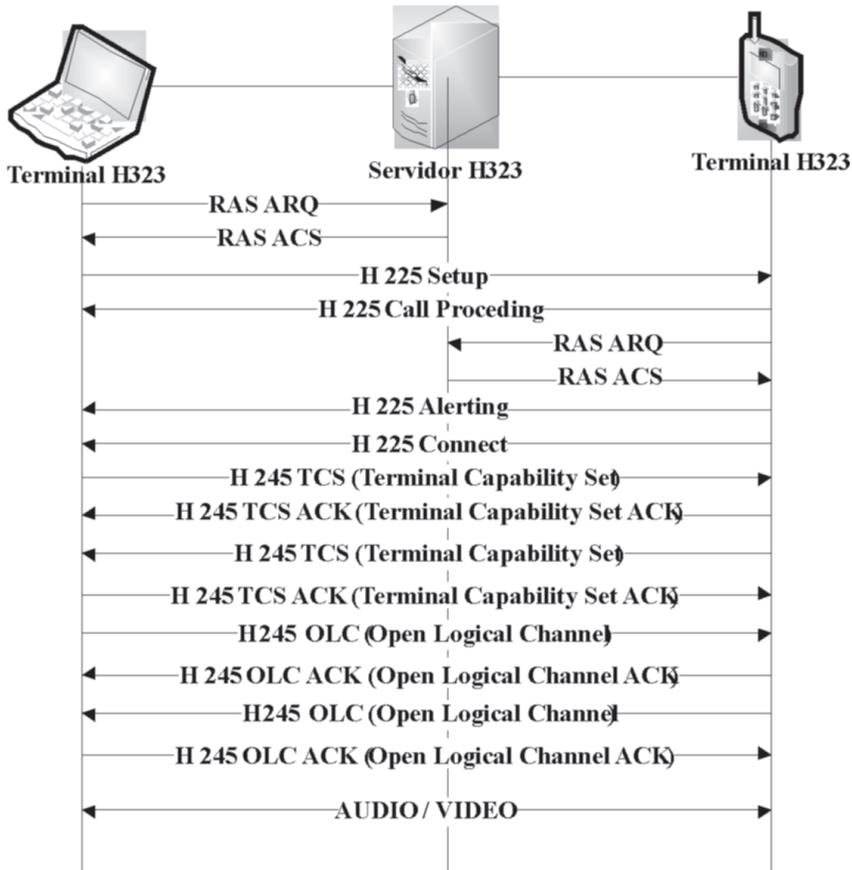


Figura 2. Funcionamiento del protocolo H.323<sup>3</sup>

do a su interacción cotidiana con las redes de telefonía convencional (PSTN - Red Telefónica Conmutada), que si poseen mecanismos seguros como lo son su perímetro y su seguridad física por defecto; pero la estructura propia de la Internet elimina dichas barreras permitiendo que atacantes puedan aprovechándose de la versatilidad (búsqueda de vulnerabilidades) y proliferación (masificación de puntos de ataque) de redes basadas en Internet, permitiendo así la materialización de incidentes de seguridad que pueden afectar seriamente el buen nombre de cualquier compañía y poner en riesgo su competitividad en un mercado (cualquiera que este sea) cada vez más desafiante y complejo.

3 VARIOS; «Packet-Based Multimedia Communications Systems» ITU-T Recommendation H.323, 2003.

Otro aspecto a tener en cuenta al momento de evaluar cuales son los puntos débiles en la seguridad de los ambientes VoIP, es que esta es una tendencia de comunicación parcialmente nueva, y que por ende existen varios protocolos y tecnologías de implementación que aun se encuentran en estado emergente y que por esto pueden generar brechas de seguridad debido a su falta de robustez; y esto sumado a posible negligencia al no adoptar buenas prácticas de seguridad al momento de gestionar una solución VoIP, se puede llegar a generar una red VoIP altamente insegura y que puede llegar a ser bastante nociva a la información sensible que circula por dicha solución.

Pero aunque la seguridad en soluciones de VoIP puede llegar a ser complicada de aplicar, pero no es imposible; lo que hay que tener muy presente y ser conscientes, como responsables de la seguridad de la información, es que los agresores informáticos están viendo a las redes VoIP como un nuevo punto de ataque, debido a que un ambiente VoIP desprotegido les puede dar acceso a información sensible de manera rápida y de «fácil» captura en un ambiente de comunicación vulnerable.

## CATEGORÍAS DE ATAQUE A SISTEMAS VOIP

Ya habiendo visto cuales son las falencias de seguridad que se pueden presentar al momento de implementar un sistema de comunicaciones telefónicas basado en el protocolo IP; pasaremos a ver cuáles son las alternativas de agresión más ampliamente utilizadas por los atacantes informáticos al momento de comprometer la integridad, disponibilidad y confidencialidad de la información que circula por una red VoIP.

### A. Espionaje y análisis de tráfico VoIP

En esta tendencia de ataque a sistemas VoIP, lo que un usuario mal intencionado busca es poder monitorear y en su efecto escuchar las llamadas telefónicas desprotegidas realizadas por dos o más terminales bajo cualquier protocolo VoIP, logrando así socavar la confidencialidad e integridad de la información sensible que se manipula y distribuye por dicho medio.

Las dos técnicas de ataque que son genéricas o meta-ataques utilizados bajo esta tendencia son:

- **Análisis de tráfico VoIP:** Esta técnica busca estudiar como las terminales VoIP se comunican entre sí; mediante la realización de un exhaustivo estudio del comportamiento y estructura de los paquetes VoIP que transitan a través de la solución de telefonía IP que está siendo auditada o atacada,

junto con una investigación de los protocolos VoIP y de red utilizados en la infraestructura de comunicación y las direcciones IP involucradas al momento de realizar las llamadas telefónicas; y es con esta información que el atacante puede estructurar su estrategia de ataque, moldeándola bajo los aspectos específicos de la red VoIP a comprometer .

- **Eavesdropping (Espionaje):** Esta técnica de ataque es la que más afecta a las soluciones de telefonía IP, ya que es en esta donde un atacante pueda escuchar las llamadas realizadas entre dos terminales VoIP; este modelo de ataque es el comúnmente llamado «pinchado» de llamadas, que tan comúnmente escuchamos en el ambiente político colombiano en los últimos tiempos. Esta técnica de ataque se materializa bajo el tipo de ataque llamado Man-in-the-Middle (MitM) donde el atacante que ha logrado tener acceso a la red que soporta a la solución VoIP puede colocarse entre dos terminales VoIP para así lograr escuchar y almacenar en formato de audio las llamadas realizadas entre estas dos terminales y poder apropiarse de cualquier información sensible que haya sido comunicada en dichas llamadas telefónicas.

Otras técnicas de ataque, mas específicas que se pueden apreciar bajo esta clasificación son las siguientes:

#### **Sniffing (Análisis de tráfico) de transferencia de archivos de configuración TFTP**

El atacante busca estudiar el trafico UDP (User Datagram Protocol), para descubrir el nombre e información de los archivos de configuración TFTP (Trivial File Transfer Protocol) y así descargarlos del servidor TFTP para su estudio. Estos archivos contienen datos clave, como lo son passwords y nombres de usuario, que son posteriormente aprovechados por el atacante para realizar nuevos ataques con el uso de credenciales validas y poder ingresar a la solución VoIP como un usuario legítimo.

#### **Escaneo de la red VoIP con pings TCP**

En esta técnica, el atacante envía de manera aleatoria peticiones de conexión a diferentes puertos de conexión TCP (Transmission Control Protocol); que son los identificadores de las aplicaciones emisoras y receptoras en cualquier equipo de computo; entonces mediante esta técnica el atacante puede ver el comportamiento de la conexión TCP/IP que soporta a la solución VoIP y así darse una idea de la estructura y del funcionamiento del sistema VoIP que esta maneja.

**Escaneo UDP**

El atacante envía cabeceras UDP (User Datagram Protocol) vacías a los puertos UDP de la víctima VoIP, y si la víctima responde con un paquete UDP, indica que el servicio está activo y así poder aprovecharse posteriormente de sus posibles vulnerabilidades.

**Enumeración de usuarios y de extensiones**

El atacante se aprovecha del método SIP Register, que es generado por el usuario para el gestor de llamadas VoIP que para este ataque es un servidor SIP, aquí el atacante envía solicitudes de registro a varias extensiones y usuarios de la red VoIP, para así poder listar las extensiones no utilizadas o los usuarios no registrados.

**Enumeración de servidores TFTP**

La mayoría de teléfonos VoIP utilizan un servidor TFTP (Trivial File Transfer Protocol) para descargar el archivo de configuración del teléfono; pero el servidor TFTP no requiere de autenticación para enviar el archivo de configuración y es allí, que si el agresor logra comprometer a el servidor TFTP y envía archivos de configuración corruptos a el teléfono VoIP puede configurarlos de manera insegura o con vulnerabilidades que el atacante podrá aprovechar en futuras arremetidas.

**B. Suplantación**

Esta clasificación de ataques a sistemas VoIP agrupa a todos los ataques que pueden suplantar la identidad de un usuario, terminal o servicio VoIP autorizado; para que así el atacante pueda realizar redirección de llamadas, acceder a la red VoIP, ya sea a la información sensible que es transmitida por ella, o a elementos físicos de la red VoIP, o a servicios VoIP implementados, o a otros activos VoIP que le interese comprometer.

Este tipo de ataques ocurren debido a la mala estructuración y/o configuración insegura de una red VoIP; puesto que al existir estas falencias no se puede confiar en el identificador de llamadas utilizado por el gestor de llamadas y que es consultado por las terminales VoIP como método de verificación de la identidad del usuario que genera y/o recibe una llamada telefónica, o si la terminal VoIP que está implicada en el proceso de una llamada está realmente autorizada para realizar dicha función; ya que cualquier agresor puede rea-

lizar una suplantación a nivel digital utilizando muestras de voz, que puedan haber sido capturadas en la misma red VoIP, para así poder hacerse pasar por un usuario autorizado o de confianza para el receptor de la llamada y mediante técnicas de modificación de elementos de red, puede hacerse pasar por un equipo o terminal VoIP autorizado.

Algunos ejemplos de ataques basados bajo esta metodología son:

### **Ataques de Replay**

Aquí un atacante utiliza de tonos de llamada (redes PSTN), muestras de voz o paquetes de autenticación VoIP validos que han sido previamente capturados, para así intentar pasar las llamadas realizadas por el atacante como llamadas validas en el sistema y/o engañar al receptor.

### **Suplantación de Identidad**

Este ataque es simplemente lograr que un usuario o terminal VoIP se haga pasar por otro en la red VoIP; la suplantación de identidad como método de ataque en una red VoIP puede llegar a ser muy efectivo al momento de querer tomar información de una víctima que confía en la extensión y de la persona de quien le llega la llamada. Este ataque se logra bajo el concepto de envenenamiento de ARP (Address Resolution Protocol) que es poder relacionar la dirección MAC (Media Access Control Address) del atacante con una IP real de la red VoIP, logrando así pasar como una terminal VoIP autorizada, y así poder realizar y recibir llamadas en la red VoIP comprometida.

### **Redirección - Hijacking**

En este tipo de ataque se busca que una de las terminales involucradas en una llamada telefónica sea neutralizada y suplantada por una terminal controlada por el atacante, para así poder «secuestrar» la llamada realizada. La suplantación se puede realizar mediante el envenenamiento al servidor DNS (Domain Name System), que en si es engañar al servidor DNS, utilizado en la red que soporta la solución VoIP para que este acepte la veracidad de respuesta de DNS falsas, para así poder direccionar a los equipos VoIP legítimos a terminales controladas por el atacante que se hacen pasar por extensiones autorizadas de la compañía. Este tipo de ataques son utilizados para robar identidades, credenciales y otra información sensible al hacer creer a un usuario legítimo que está hablando con otro usuario de la compañía y que este se encuentra con los privilegios suficientes para poder escuchar y tener acceso a dicha clase de información sensible que el atacante solicita.

### C. Interrupción del servicio de telefonía

Cualquier compañía, sin importar su razón social, tiene a su red telefónica como mecanismo principal de comunicación directa con sus clientes, proveedores, empleados y asociados; debido a que la comunicación vía telefónica es mecanismo de intercambio de información que es más ampliamente utilizado y adoptado a nivel mundial. Por lo cual si se presenta cualquier perturbación en el funcionamiento habitual de este servicio, puede afectar de manera negativa y significativa el buen funcionamiento de cualquier organización.

Para nuestro caso, la interrupción del servicio se aplica directamente a todos los ataques que buscan impedir el servicio VoIP, incluyendo sus servicios de acceso y de administración; atacando a cualquier dispositivo de la red que soporta a el servicio VoIP, esto incluye a los servidores VoIP (Gestor de llamadas), las terminales VoIP, routers y demás elementos de red que interactúan o dan soporte a la infraestructura VoIP. Estos ataques pueden ser directos o de manera remota, lo directos son cuando el atacante tiene acceso físico al dispositivo de red y lo corrompe para que deje de funcionar correctamente, este tipo de ataque incluye el corte de suministro de energía a dichos elementos de red, para así poderlos dejar completamente fuera de servicio; y los ataques remotos son los que mediante el envío de paquetes VoIP o de peticiones de conexión de manera indiscriminada y basándose en las vulnerabilidades de los protocolos VoIP, buscan congestionar y por ende bloquear a cualquier dispositivo de la red VoIP o de la red de soporte que utilice la solución de VoIP a comprometer, este tipo de ataques remotos son llamados ataques de DoS (Denegación de Servicio).

Algunos ejemplos de ataques basados bajo esta metodología son:

#### **Ataques DoS distribuidos**

Este tipo de ataque Dos (Denial of Service), es donde el atacante logra tener bajo su control a un gran número de equipos de usuarios desprevenidos que son capaces de realizar peticiones de conexión o llamadas VoIP, formando así una red Zombie, con la cual el atacante realizará de manera indiscriminada peticiones a la red VoIP de manera de avalancha aprovechando que cada equipo Zombie puede generar miles de mensajes de conexión o llamadas VoIP a un único dispositivo; buscando así inundar de paquetes VoIP al elemento de red víctima y este termine siendo incapacitado debido a el agotamiento de sus recursos.

### **Ataques de inundación de UDP**

Es el tipo de ataque DoS (Denial of Service) más utilizado por los atacantes, debido a que las direcciones origen de los paquetes UDP (User Datagram Protocol) son fácilmente falsificables y también que la mayoría de dispositivos VoIP actuales soportan al protocolo UDP de manera nativa y por ende transparentemente.

### **Ataques de inundación de ICMP**

En este tipo de ataque a la disponibilidad del servicio VoIP, el atacante busca realizar un ataque DoS, aprovechando que la mayoría de firewalls y routers vienen configurados por defecto para dejar circular de manera desapercibida a paquetes ICMP (Internet Control Message Protocol), debido a que por su naturaleza de mensaje de control no son considerados peligrosos sino que son solo de diagnóstico; pero un atacante puede tratar de inutilizar a un dispositivo de la red VoIP a comprometerlo mediante el envío indiscriminado dichos paquetes de diagnóstico.

### **Envío de paquetes malformados (Fuzzing)**

Puesto que la mayoría de equipos de red, sean o no VoIP están concebidos y desarrollados para manejar tráfico de red convencional; un atacante puede ver este concepto como una fuente de ataque; ya que estos dispositivos cuando reciben paquetes desconocidos o malformados no saben cómo manipularlos, lo cual esporádicamente lleva al bloqueo del equipo o servidor de red que da soporte a la solución VoIP o directamente a los elementos propios de una red VoIP, logrando así minar la disponibilidad del servicio VoIP.

### **Fragmentación de paquetes**

El atacante segmenta los paquetes UDP (User Datagram Protocol) y TCP (Transmission Control Protocol), y los envía de manera separada por la red VoIP, buscando así inutilizar a los equipos VoIP o de su infraestructura de red mediante el consumo de recursos, debido a la espera de la llegada del paquete faltante para completar la solicitud de conexión.

Ya habiendo visto grosso modo cuales son las principales técnicas de ataque a servicios de VoIP, pasamos a ver de manera categorizada y clasificada las tendencias de ataque a sistemas VoIP, en el cual podremos observar cuales

son las elecciones de ataque utilizadas por un usuario mal intencionado al momento de querer comprometer un servicio VoIP (ver figura 3).

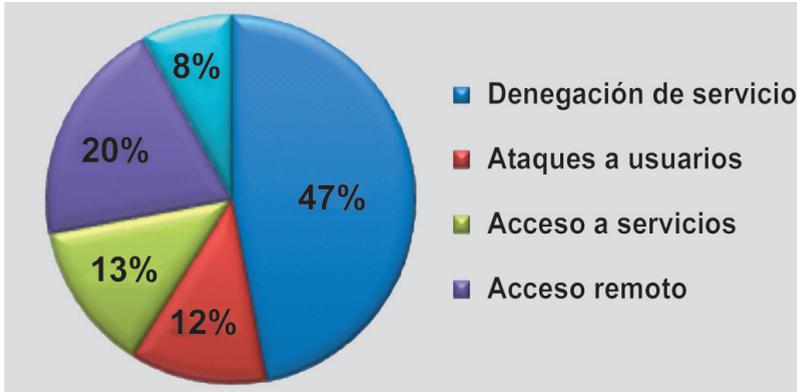


Figura 3. Ataques a redes VoIP.<sup>4</sup>

Como podemos ver la mayoría de ataques a sistemas VoIP buscan generar una interrupción en el servicio de telefonía, buscando así que la disponibilidad del servicio VoIP se vea mermada de manera significativa. Este concepto lo podemos ver claramente reflejado en la siguiente figura (ver figura 4).

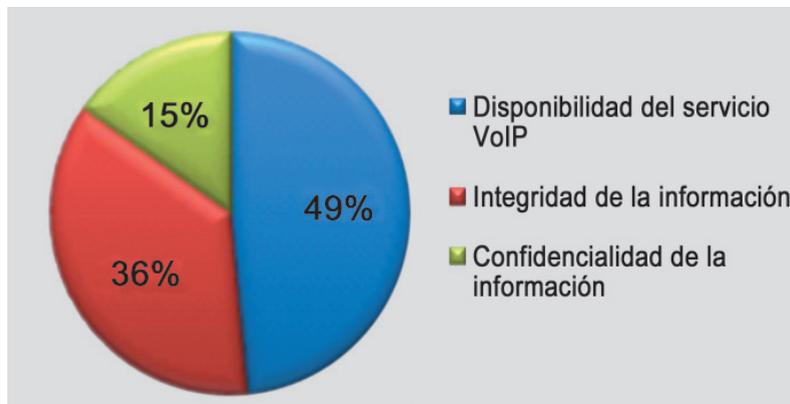


Figura 4. Tendencia de ataques a sistemas VoIP.<sup>5</sup>

4 ANGELOS KEROMYTIS; «Voice over IP Security: A Comprehensive Survey of Vulnerabilities and Academic Research»; Editorial: Springer, 2011.

5 Ibídem.

¿Pero por qué los atacantes deciden afectar la disponibilidad del servicio de VoIP?; con base en esta pregunta se puede analizar y deducir que los atacantes han descubierto que esta característica es la más deseada por los usuarios de las redes VoIP y además que la falta del servicio VoIP genera una gran repercusión y que afecta de manera abismal a los usuarios y/o las empresas que basan su comunicación con sus clientes y demás entes importantes con su red VoIP.

Además hay que tener muy presente que este tipo de ataques son los que tienen una gran facilidad de ejecución para el atacante novato o inexperto en el tema; en cuanto al resto de tipos de ataque a sistemas VoIP, también son de alta peligrosidad, pero su nivel de dificultad al momento de su ejecución es mayor y por ende se requiere de unas condiciones especiales y de un atacante experto o por lo menos familiarizado con la red VoIP a atacar, para tener un índice de éxito favorable.

## MECANISMOS DE SEGURIDAD VOIP

Ya habiendo visto cuales son los mecanismos de ataque y de aprovechamiento de las vulnerabilidades de los sistemas VoIP, pasamos a revisar cuales son las tendencias de seguridad en ambientes VoIP.

### A. Protección a nivel de señalización

En el momento en que se empieza a pensar sobre la seguridad en redes VoIP, uno de los temas principales a tener en cuenta es la protección de la señalización de los mensajes o paquetes que se intercambian entre los equipos terminales VoIP y los demás elementos de la red VoIP; esto se debe a la gran cantidad de información sensible a nivel de protocolo VoIP que contienen dichos mensajes, como por ejemplo los datos del manejo criptográfico de las llamadas telefónicas, o los mensajes de petición de conexión entre dos terminales VoIP, y junto con la posibilidad de que estos mensajes pueden estar transitando por zonas de la infraestructura de red de soporte de la solución VoIP que son inseguras o con políticas de seguridad cuestionables, pueden darle a un atacante suficiente información para que pueda identificar cual es la estructura, a nivel de protocolo, de la red VoIP que desea comprometer para luego perfilar su estrategia de ataque.

Ya habiendo visto cual es la importancia de la información contenida en los mensajes o paquetes manejados por los dispositivos VoIP, pasaremos a exponer algunas de las medidas de seguridad utilizadas para la protección de información a nivel de señalización que son utilizadas por los dos principales protocolos VoIP:

## Mecanismo de protección a nivel de señalización

### Protección de la señalización en el protocolo SIP

El protocolo SIP propone en su RFC 3261<sup>6</sup>, el uso de varios protocolos de seguridad de señalización, que son ampliamente reconocidos para asegurar la señalización de sus mensajes; entre los cuales se encuentran el IPsec (Internet Protocol Security) donde este protocolo genera un «túnel» de seguridad entre dos entes de la red VoIP, para que así los mensajes que transiten estén protegidos de cualquier ataque. Otra recomendación de seguridad a nivel de señalización en el protocolo SIP es el uso de TLS (Transport Layer Security), que es definido en el RFC 4346<sup>7</sup>, donde se implementa una autenticación mutua entre un par de elementos de la red VoIP (terminal y servidor VoIP), este protocolo de seguridad se compone de dos capas, la primera es la llamada TLS Record Protocol o protocolo de registro TLS donde se encarga de mantener la conexión segura entre los dos puntos VoIP asegurados y la segunda capa es el TLS Handshake Protocol o protocolo de negociación TLS donde se gestionan las propiedades de criptografía utilizada en la comunicación entre los entes VoIP, para así poder generar un puente seguro entre ellos para su intercambio de mensajes VoIP. Y por último, otro de los protocolos destacados al momento de aplicar seguridad a nivel de señalización del protocolo SIP es el S/MIME (Secure / Multipurpose Internet Mail Extensions) que es especificado en el RFC 3851<sup>8</sup>, el cual provee mecanismos que garantizan la integridad, autenticación y confidencialidad de diferentes mensajes, entre ellos los mensajes utilizados por el protocolo SIP, su funcionamiento a grandes rasgos es que S/MIME firma digitalmente de manera parcial o total al mensaje SIP, logrando así que el receptor del mensaje pueda verificar si el mensaje ha sido manipulado y/o modificado en su tránsito por la red VoIP.

### Seguridad a nivel de señalización en el protocolo H.323

El protocolo H.323 maneja un protocolo exclusivo de seguridad, que es el protocolo H.235; este es el que define los procesos de autenticación y de encriptación utilizados al momento de manejo de mensajes entre elementos VoIP que utilizan el protocolo H.225 para establecer la comunicación de mensajes VoIP entre dos elementos de la red VoIP. Una de las grandes ventajas de implementar la seguridad de señalización bajo el protocolo H.235 aparte de la perfecta simbiosis con el protocolo H.323, es el hecho de poder incorporar material criptográfico para la protección de la señalización de mensajes directamente a los mensajes de establecimiento de llamadas.

6 H. SCHULZTRINNE, E. SCHOOLER Y J. ROSENBERG; "SIP: Session Initiation Protocol" RFC 3261, 2002.

7 T. DIERKS Y E. RESCORLA; «The Transport Layer Security (TLS) Protocol» RFC 4346, 2006.

8 B. RAMSDALL; «Secure/Multipurpose Internet Mail Extensions (S/MIME)» RFC 3851, 2004.

## B. Protección a nivel de multimedia:

La principal preocupación al momento de pensar en la seguridad de soluciones VoIP, es el proteger las conversaciones telefónicas realizadas entre los usuarios de cualquier solución VoIP; ya que si por mas que se aseguren los procesos de señalización de mensajes VoIP pero no se protege la información de los servicios de telefonía y/o de videoconferencia soportados, estaremos perdiendo directamente la información sensible (passwords, nombres de usuario, datos vitales de clientes, entre otra información) contenida en las llamadas telefónicas y/o sesiones de videoconferencia que transitan en la red VoIP.

Es por esto que al momento de generar una solución VoIP segura, se debe pensar en utilizar protocolos de seguridad que protejan tanto a nivel de señalización como a nivel multimedia de manera conjunta, para así generar un único canal de flujo de información VoIP protegido; pero lograr este nivel de protección puede llegar a ser algo confuso para el especialista en seguridad informática, puesto que este tipo de protocolos combinados tienden a ser complejos al momento de diseñar y de implementar en un ambiente VoIP, que solo el simple hecho de implementarlos por separado; y además se debe garantizar que por agregar parámetros de seguridad complejos a la solución VoIP, esta no se vea comprometida en su buen funcionamiento y/o pierda calidad en el servicio, un ejemplo de cómo es la complejidad al momento de generar un ambiente VoIP seguro no debe influir en el funcionamiento óptimo del servicio VoIP, es el hecho de que se debe realizar los procesos de encriptación, desencriptación y de autenticación de las llamadas sin agregar tiempos de latencia que comprometan la interacción en tiempo real entre el emisor y el receptor de la llamada telefónica, o el hecho de congestionar a la red VoIP al utilizar ancho de banda extra al momento de ejecutar los servicios de seguridad, ya que lo óptimo es que estos se ejecuten de manera transparente al usuario final.

Así que es por estas complejidades de aplicación de seguridad y además del hecho de poder garantizar un proceso de gestión y realización de llamadas telefónicas ágil y similar al servicio prestado por las redes PSTN (Public Switched Telephone Network), que se descuida tanto el concepto de la seguridad en las redes VoIP y pasan estas a ser un campo fértil para ataques por parte de hackers en búsqueda de información sensible y de fácil adquisición.

Pero no todo es negativo al momento de proteger el contenido multimedia (voz y/o video) de un servicio VoIP, ya que existen varios protocolos y me-

canismos de seguridad idóneos para esta materia, pero que son implementados de manera separada con los procesos de protección a nivel de señalización; lo cual permite una menos compleja implementación pero que disminuye de manera sustancial el nivel de protección de los datos que nos puede llegar a generar al utilizar un esquema integrado de protección en ambos flancos.

Entre los protocolos de seguridad VoIP, el más ampliamente utilizado y de mayor integración con el ambiente VoIP, en lo referente a la protección de datos multimedia, es el protocolo SRTP (Secure Real Time Protocol) debido a que cualquier implementación VoIP utiliza al protocolo RTP (Real Time Protocol o Protocolo de Transporte en Tiempo Real) como mecanismo para la transmisión de datos multimedia, esto es debido a que el protocolo RTP realiza comunicaciones multimedia de manera muy superficial, ya que únicamente define de manera básica las características mínimas de la sesión multimedia, para así poder generar una transmisión rápida y sin interrupciones. Así que debido al amplio uso del protocolo RTP, nace el protocolo SRTP (Secure Real Time Protocol o Protocolo de Transporte en Tiempo Real Seguro), que fue diseñado para poder realizar la transmisión de datos multimedia de manera fluida pero que además agrega componentes de seguridad para garantizar la integridad, autenticación y confidencialidad de las sesiones RTP, como lo son el poder agregar componentes criptográficos y la independencia del transporte de la señal multimedia para así controlar la pérdida de paquetes VoIP que puedan ser utilizados de manera no apropiada por terceros mal intencionados.

### C. Nuevas tendencias en seguridad VoIP:

En lo que se refiere al futuro en la seguridad en ambientes de trabajo VoIP, la comunidad de investigación y desarrollo de metodologías de seguridad informática, ha presentado varios postulados académicos que presentan metodologías innovadoras, en búsqueda de poder generar soluciones de seguridad robustas que logren mitigar las vulnerabilidades e intentos de ataque por parte de hackers que han descubierto en esta tecnología «emergente», como fuente asequible de información sensible. A continuación se presentaran algunos de las propuestas más interesantes y que implican un aumento sustancial en el nivel de seguridad de una solución VoIP.

El investigador Eric Chen, en su paper llamado «Detecting DoS Attacks on SIP Systems»<sup>9</sup>, presenta un mecanismo de detección de ataques de dene-

9 ERIC CHEN; «Detecting DoS Attacks on SIP Systems»; Paper presentado en Proceedings of the 1st IEEE Workshop on VoIP Management and Security (VoIP MaSe); 2006.

gación de servicio (DoS) en ambientes VoIP SIP, que se basa en la medición de las transacciones VoIP realizadas en cada nodo de la solución VoIP, de la cantidad de errores generados en la plataforma VoIP y el nivel de tráfico VoIP, para así tener un valor esperado y óptimo en cada una de estas variables; y al momento de presentarse anomalías en dichos valores se generaran alertas de un posible ataque de denegación de servicio al administrador de la red VoIP.

Los profesores Vijay Balasubramaniyan, M. Ahamad y Haesun Park, en el documento «CallRank: Combating SPIT Using Call Duration, Social Networks and Global Reputation»<sup>10</sup>, proponen el uso de un mecanismo que se base en los tiempos de duración de las llamadas y en un modelo gráfico que represente como es la red social de los consumidores de una solución VoIP; para así lograr determinar cuál es nivel de reputación de cada uno de dichos usuarios; y basándose en estos datos se lograría determinar cuáles son llamadas legítimas y cuales son simplemente intentos de ataque por parte de un usuario mal intencionado, ya que si se evidencian llamadas de muy corta duración o llamadas de larga duración entre usuarios con una relación social baja puede ser que estas llamadas no sean generadas por las personas dueñas de las extensiones VoIP implicadas.

Los investigadores Alex Talevski, Elizabeth Chang y Tharam Dillon presentaron en formato de paper, el documento «Secure Mobile VoIP»<sup>11</sup>; que es una propuesta de integración de mecanismos de seguridad criptográficos en protocolos VoIP ligeros, para ser implementados en soluciones VoIP en terminales celulares. Este proyecto es un gran avance en búsqueda de generar mecanismos de seguridad que garanticen la confidencialidad en llamadas VoIP generando un canal seguro en un ambiente tan inseguro y amplio como lo es las redes de telefonía celular.

## CONCLUSIONES

La tecnología VoIP aun se considera como una tecnología relativamente nueva y de alta adopción, y por ende debe ser tratada como tal en lo que se refiere a su seguridad; teniendo especial cuidado en las vulnerabilidades de

---

10 V. BALASUBRAMANIYAN, M. AHAMAD Y H. PARK; «CallRank: Combating SPIT Using Call Duration, Social Networks and Global Reputation»; Proyecto de desarrollo presentado en Proceedings of the 4th Conference on Email and Anti-Spam (CEAS); 2007.

11 A. TALEVSKI, E. CHANG. Y T. DILLON; «Secure Mobile VoIP»; Paper expuesto en Proceedings of the International Conference on Convergence Information Technology; 2007.

sus protocolos y en la arquitectura de las redes de datos que soportan a las soluciones VoIP. Otro concepto a tener en cuenta en lo emergente de la tecnología VoIP, es que los ataques presentados en el anterior artículo, solo pueden ser la punta del iceberg de posibles variaciones o nuevas tendencias de ataque que se puedan aprovechar de la tecnología VoIP, por ende se recomienda al lector, que sea responsable de una solución VoIP estar en constante evaluación de dicha red VoIP, y se invita a todo tipo de usuario VoIP a estar en constante aprendizaje de nuevas técnicas de protección VoIP y de las posibles nuevas vulnerabilidades o riesgos de una solución VoIP, y así poderlos afrontar de mejor manera en un futuro no muy lejano.

Otro concepto a tener en cuenta es que los problemas de seguridad en redes VoIP, no solo se radican en el estado naciente de los protocolos en los que se apoyan para generar los servicios de telefonía y/o teleconferencia; sino que hay que tener muy en cuenta la infraestructura de red que soporta la solución VoIP, por ende hay que purgar cualquier configuración débil o por defecto de los equipos de red que interactúan o soportan a la red VoIP, para así poder minimizar la cantidad de puntos débiles que puedan comprometer de cualquier manera al servicio VoIP a proteger.

Y por último, también se ha podido observar, que cualquier solución de seguridad aplicada en el ambiente VoIP viene de la mano con un costo, que puede ser monetario o de dificultad de implementación, por ende es recomendado que el profesional de la seguridad de la información que se ponga en la tarea de asegurar la información de una red VoIP, balancee de la mejor manera sus necesidades de seguridad frente a los costos que estos conllevan, para así encontrar la solución óptima y apropiada de seguridad VoIP.

## REFERENCIAS

1. H. SCHULZRINNE, E. SCHOOLER y J. ROSENBERG. «SIP: Session Initiation Protocol» RFC 3261, 2002.
2. VARIOS. «Packet-Based Multimedia Communications Systems» ITU-T Recommendation H. 323, 2003.
3. ANGELOS KEROMYTIS. «Voice over IP Security: A Comprehensive Survey of Vulnerabilities and Academic Research»; Editorial: Springer, 2011.
4. T. DIERKS y E. RESCORLA. «The Transport Layer Security (TLS) Protocol» RFC 4346, 2006.

5. B. RAMSDELL. «*Secure/Multipurpose Internet Mail Extensions (S/MIME)*» RFC 3851, 2004.
6. ERIC CHEN. «*Detecting DoS Attacks on SIP Systems*»; Paper presentado en *Proceedings of the 1st IEEE Workshop on VoIP Management and Security (VoIP MaSe)*, 2006.
7. V. BALASUBRAMANIYAN, M. AHAMAD y H. PARK. «*CallRank: Combating SPIT Using Call Duration, Social Networks and Global Reputation*»; Proyecto de desarrollo presentado en *Proceedings of the 4th Conference on Email and Anti-Spam (CEAS)*, 2007.
8. A. TALEVSKI, E. CHANG. y T. DILLON. «*Secure Mobile VoIP*»; Paper expuesto en *Proceedings of the International Conference on Convergence Information Technology*, 2007.

## BIBLIOGRAFÍA

1. ALAN B. JOHNSTON. «*Understanding Voice over IP Security*»; Editorial: Artech House Publishers, 2006.
2. ANGELOS KEROMYTIS. «*Voice over IP Security: A Comprehensive Survey of Vulnerabilities and Academic Research*»; Editorial: Springer, 2011.
3. MARK COLLIER y DAVID ENDLER. «*Hacking Exposed VoIP: Voice Over IP Security Secrets & Solutions*»; Editorial: McGraw-Hill, 2006.
4. PETER THERMOS y ARI TAKANEN. «*Securing VoIP Networks: Threats, Vulnerabilities and Countermeasures*»; Editorial: Addison-Wesley Professional, 2007.

## INFOGRAFÍA

1. D. RICHARD KUHN, THOMAS J. WALSH y STEFFEN FRIES. «*Security Considerations for Voice Over IP Systems - Recommendations of the National Institute of Standards and Technology*»; Documento WEB PDF; [URL: <http://csrc.nist.gov/publications/nistpubs/800-58/SP800-58-final.pdf>].
2. MARK COLLIER. «*Basic Vulnerability Issues for SIP Security*»; Documento WEB - PDF; [URL: [http://download.securelogix.com/library/SIP\\_Security030105.pdf](http://download.securelogix.com/library/SIP_Security030105.pdf)].
3. TOSHIO MIYACHI. «*Principles of VoIP Security*»; Documento WEB - PDF; [URL: [www.necunifiedsolutions.com/Downloads/WhitePapers/NEC\\_VoIP\\_Security\\_BestPractice\\_Vol\\_1\\_WhPpr.pdf](http://www.necunifiedsolutions.com/Downloads/WhitePapers/NEC_VoIP_Security_BestPractice_Vol_1_WhPpr.pdf)].

4. TOSHIO MIYACHI Y TERUHARU SERADA. «*Models of Secure VoIP Systems*»; Documento WEB - PDF; [URL: [www.necunifiedsolutions.com/Downloads/WhitePapers/NEC\\_VoIP\\_SecurityBestPractice\\_Vol\\_2\\_WhPpr.pdf](http://www.necunifiedsolutions.com/Downloads/WhitePapers/NEC_VoIP_SecurityBestPractice_Vol_2_WhPpr.pdf)].

# CONTEXTO Y ELEMENTOS DE UNA SINTAXIS DEL LENGUAJE LÓGICO

MAGDALENA PRADILLA RUEDA\*

Recibido: 15 de junio de 2013 / Aceptado: 2 de agosto de 2013

## RESUMEN

Los estudios sobre el *Lenguaje* y especialmente sobre el *Análisis del Lenguaje*, realizados por los lógicos de principios del siglo XX, dentro del desarrollo de la *Lógica Matemática*, sientan las bases de la estructuración de un Lenguaje Lógico. Uno de los ejes principales es la *sintaxis*, que determina el funcionamiento del lenguaje, a partir de la deducción formalizada, como la herramienta lógica más importante, la definición de las formas de anotación y las relaciones entre diferentes lenguajes.

**Palabras clave:** Lógica matemática, sintaxis lógica, lenguajes lógicos.

## ABSTRACT

The studies on language and especially on the analysis of language, by the logicians of the twentieth century, within the development of the mathematical logic, present the foundations of the structure of a logical language. One of the main thoroughfares is the syntax that determines the operation of the language, the deduction as the most important logical tool, defining the forms of annotation and relations between different languages.

**Keywords:** Formal languages, mathematical logic, logic syntax.

## 1. INTRODUCCIÓN

La problemática correspondiente a la *Sintaxis Lógica*, conduce a preguntarse sobre el contexto de su desarrollo dentro de la *Lógica Matemática*, presentando las bases de esta lógica y su carácter propio con respecto a la *Lógica Clásica*, las características primeras y sus tendencias. Los grandes esfuerzos de los lógicos desde hace más de un siglo presentan varias corrientes, una de las cuales se ha orientado hacia la formalización rigurosa del pensamiento lógico y matemático, la cual cambia completamente la fisonomía de la lógica. Se muestra aquí, ese camino de investigación llevado hacia los *lenguajes formales*, donde Rudolf Carnap es uno de los grandes representantes, cuyo enfoque en la *sintaxis lógica*, presenta

---

\* Doctora en Informática y Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales, Universidad de Grenoble (Francia), 1983. Tesis: *Búsqueda de Descriptores en Indexación Automática*; Doctora en Filosofía, Universidad Paris 1- Panthéon Sorbonne, 2008. Tesis: *Hacia una Epistemología de la Teoría Informática*. Actualmente Investigadora en el Centro de Investigaciones de la Corporación Universitaria Republicana.

un *hito* dentro de las investigaciones relativas a este tema. En este sentido, a partir de los presupuestos y lineamientos de Carnap, se presentan las descripciones, principios generales y procedimientos de los *lenguajes formales*, en general y en particular de la *sintaxis* correspondiente. Así, tomando como base la existencia de la *deducción* de los sistemas de sintaxis, se muestran las propiedades, elementos, definiciones y relaciones con otras sintaxis. Igualmente se señalan las diferentes problemáticas y las soluciones que se han encontrado dentro del desarrollo de la lógica y los sistemas de sintaxis.

Metodológicamente se describen y analizan los conceptos de lógica matemática y del lenguaje, mostrando su construcción y señalando su estructuración y sus relaciones con otros conceptos. Se destacan conceptos más sólidos, base de núcleos epistémicos que conforman la base teórica de la sintaxis. Así mismo, se sitúa el contexto histórico, crítico y conceptual de estos núcleos epistémicos mostrando las rupturas conceptuales y sus soluciones.

## 2. SINTAXIS LÓGICA SEGÚN CARNAP

Rudolf Carnap<sup>1</sup> en sus estudios sobre *Análisis del Lenguaje* nos presenta el lenguaje como un “*sistema de actividades o de hábitos o disposiciones para ciertas actividades, sirviendo principalmente para los propósitos de comunicación y de coordinación de actividades entre los miembros de un grupo. Los elementos del lenguaje son signos: sonidos o marcas escritas, producidas por los miembros del grupo con el objeto de ser comprendidos por otros miembros a fin de influenciar en su comportamiento*” (Carnap, 1939, p. 3).

El plantea como disciplinas que conciernen al lenguaje: la pragmática, la semántica y la sintaxis. La *pragmática*, entendida como la acción, estado y ambiente de un hombre que habla u oye o dice una determinada palabra, es de tipo empírica; la *semántica*, tiene en cuenta solamente las expresiones del lenguaje y sus relaciones con aquello que ellas designan; la *sintaxis*, abstrae completamente aquello que designa y se enfoca en las propiedades formales de las expresiones y sus relaciones (*sintaxis lógica*).

Al ampliar el concepto de *pragmática* de un lenguaje dado, la presenta como el encuentro de las similitudes de este lenguaje con lenguajes que le son cercanos; es una disciplina empírica que observa con especial cuidado el comportamiento y el quehacer de los resultados de los diferentes lenguajes de la ciencia. Con esta observación, se descubren las equivalencias de palabras y formas de

---

1 Rudolf Carnap (1891-1970) uno de los fundadores del Positivismo Lógico y miembro del Círculo de Viena.

los lenguajes, la conexión entre palabras, los objetos a que hacen referencia las palabras, las preferencias en los diferentes lenguajes, grupos de edad o geográficos en la selección de palabras y el rol del lenguaje en las diversas relaciones sociales.

Así mismo, Carnap define la *semántica* como el estudio de las relaciones entre las expresiones del Lenguaje dado y sus *designata*<sup>2</sup>, lo cual concierne un sistema de reglas que establecen tales relaciones, llamadas *reglas semánticas*, que deben ser sin ninguna ambigüedad. De esta manera, la pregunta de falso o verdadero va siempre a referirse a un sistema de reglas y que en sentido estricto van a referirse al lenguaje dado que puede llamarse el sistema semántico S. El lenguaje dado toca así el mundo de los hechos o fenómenos y sus propiedades. De manera que, el sistema S se construye a partir de las propiedades que se han establecido en las reglas: es una construcción reglada a partir del mundo de los hechos. Aquí se ve la relación de la pragmática con la semántica porque los hechos pertenecientes a la pragmática son la base de las reglas dadas en la semántica.

Por otro lado, los *signos* son los elementos del sistema semántico, pueden ser palabras o símbolos especiales. La secuencia de uno o varios signos se llama *expresión*. Los signos se pueden dividir en: descriptivos y lógicos. Descriptivos, los que designan cosas o propiedades de las cosas (también se puede pensar en las relaciones entre las cosas, funciones de cosas...), son los predicados y nombres. Los *signos lógicos* son los que hacen la conexión entre los signos descriptivos, son las variables y constantes (CARNAP, 1939, p. 8)<sup>3</sup>.

La dinámica del lenguaje se realiza por medio de reglas de formación que determinan cómo pueden ser construidas las diferentes clases de signos, de manera que una expresión de S se llama *frase o proposición* si corresponde a una forma determinada según las reglas, así:

- reglas de *designata* de signos descriptivos, para los nombres que designan cosas o para los predicados que designan propiedades de cosas.
- reglas de condiciones de verdad, que corresponden a los signos lógicos.

2 *Designata*, expresión entendida como los objetos designados o referidos por un determinado nombre o palabra.

3 "Semántica como disciplina exacta es bastante nueva; se encuentra una escuela contemporánea polonesa de lógicos muy fértil. Algunos de este grupo, especialmente Lesniewski y Ajdukiewicz, han estudiado las preguntas semánticas, Tarski en su tratado sobre la verdad, hace una primera investigación comprensiva y sistemática en este campo, dando fruto a importantes resultados".

Se dice en general que, un sistema de lenguaje, o un signo o una expresión, o una frase de un sistema de lenguaje, se *entiende o comprende*, si se conocen las reglas semánticas. Podemos decir que las reglas semánticas dan una interpretación del sistema de lenguaje.

Para Carnap, entonces, la *sintaxis*, llamada la *sintaxis lógica* (Carnap, 2001), corresponde a las expresiones del lenguaje diferentes a las actividades del hablar y escuchar de las personas (*pragmática y semántica*) y de las *designata* (*semántica*). En la *sintaxis* se toma en consideración solamente las expresiones, dejando de lado las propiedades, los objetos, estados o cualquier cosa que puede ser designado o referenciado por las expresiones. La relación de designación o referencia se tendrá en cuenta tangencialmente porque es la relación del sistema semántico (Carnap, 2001)<sup>4</sup>.

Igualmente, Carnap define una estructuración del lenguaje, de manera que comporta un *Lenguaje Objeto*, referido al lenguaje de estudio o investigación y el lenguaje en el cual se obtienen los resultados del estudio, llamado *Metalenguaje*. La teoría que concierne el *metalenguaje* muchas veces se puede llamar *Metateoría*.

La definición de un término en el *metalenguaje* se llama *formal* si se refiere solamente a las expresiones del *lenguaje-objeto* (o más exactamente, a las clases de signos y al orden en el cual ocurren las expresiones), no a los *objetos extralingüísticos*<sup>5</sup>, especialmente a los *designata* de los signos descriptivos del *lenguaje-objeto*. Un término definido por una *definición formal* se llama también *formal*, como son preguntas, pruebas, investigaciones, ..., en los cuales solo los términos formales ocurren. La *Sintaxis lógica* es entonces la *teoría formal* de un *lenguaje-objeto* (CARNAP, 2001)<sup>6</sup>, la cual incluye las reglas formales que gobier-

---

4 En el Prefacio (*Foreword* p. xvi) de la “*Logical Syntax of Language*”, Carnap nos presenta las fuentes de sus estudios en *Sintaxis*: “Para el desarrollo de las ideas en este libro, he recibido un gran estímulo de varios escritos, cartas y conversaciones sobre problemas lógicos. Menciono aquí los nombres más importantes [...] Tengo una gran deuda con los escritos y lecturas de Frege. A través de él mi atención se situó en el trabajo sobre *logística* [...], los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. El punto de vista de la teoría formal del lenguaje (conocida como “*sintaxis*” en nuestra terminología) desarrollada en primera instancia por el matemático Hilbert y su “*Metamatemática*”, a la cual los lógicos poloneses, especialmente Ajdukiewicz, Lesniewski, Lukasiewicz y Tarski, le agregaron una “*Metalógica*”. Para esta teoría, Gödel crea su fructífero método de “*aritmétización*”. Así mismo, para el método de la *sintaxis*, he derivado invaluable sugerencias de conversaciones con Tarski y Gödel. Tengo que agradecer particularmente a Wittgenstein en mis reflexiones concernientes a las relaciones entre *sintaxis* y la *lógica de la ciencia*; ... Igualmente, he aprendido de los escritos de autores con los cuales no tenía enteramente una complacencia; ellos son, en primer lugar Weyl, Brouwer y Lewis”...

5 Los *Objetos Extralingüísticos*, son los objetos pertenecientes al *Mundo de los Hechos*, es decir fuera del lenguaje lógico.

6 Se distingue esta *sintaxis* de la parte de la lingüística, en la cual se conoce igualmente como *sintaxis* pero su uso no es restrictivo a términos formales.

nan el desarrollo de las expresiones del lenguaje; así una definición formal, término, análisis, etc., se llama *sintáctico*.

Por otro lado, el lógico en su quehacer determina la *estructura sintáctica lógica*<sup>7</sup> basado en la principal tarea que es acordar las conclusiones a partir del diseño de premisas, las cuales (premisas y conclusiones) son expresiones del lenguaje (no juicios como contenido de pensamientos) definidas por medio de reglas. Esta estructura define, por ejemplo, si una frase es analítica (completamente aislada de la experiencia), sintética (resultado de la experiencia y de la aplicación de un procedimiento); o si es contradictoria; si es existencial o no, lo mismo que las relaciones lógicas entre las frases o expresiones (por ejemplo, si dos frases contradictorias son compatibles con otras; si una frase es lógicamente deducible de otra o no).

En sentido general, se puede decir que la sintaxis lógica se puede equiparar a la *construcción y manipulación de un cálculo* y es solamente porque los lenguajes desarrollan cálculos, aplicando las diferentes reglas, que los lenguajes evolucionan sintácticamente. En este sentido, la sintaxis puede ser llamada *sistema deductivo o sistema formal*, presentado como un sistema de reglas formales el cual determina ciertas propiedades formales y relaciones de frases, especialmente con el propósito de la deducción formal. El procedimiento más simple para la construcción de un cálculo consiste en seleccionar algunas frases como frases primitivas (algunas llamadas como postulados o axiomas) y algunas reglas de inferencia.

Las frases primitivas y reglas de inferencia son usadas con dos propósitos, para la construcción de pruebas y para la realización de derivaciones. Las frases en las cuales se realizan las pruebas de control se llaman las frases C-verdad (ellos son llamadas probables o teoremas de cálculo). Las derivaciones de las frases C-verdad, se llaman conclusivas. También se puede llamar a la conclusión C-implicada de las clases de premisas (algunas veces se puede llamar derivable o derivada o deducible de las premisas o una consecuencia formal de las premisas). Un cálculo podrá contener unas reglas que determinen ciertas frases que sean C-falsas. Si las reglas de un cálculo determinan alguna frase como C-verdad y C-falsa, el cálculo se llama inconsistente, de lo contrario es consistente.

Las reglas del cálculo determinan, en primer lugar, las condiciones bajo las cuales una expresión puede ser definida como perteneciente a una cierta categoría de expresiones (*reglas de formación*, por ejemplo: “una expresión de este

7 En la práctica, el lógico desde Aristóteles usa reglas que controlan y producen las expresiones o frases.

lenguaje se llama “frase” cuando consiste de símbolos de tal o tal clase, ocurridas en tal y tal orden”); y en segundo lugar, determinan bajo qué condiciones la transformación de una o más expresiones dentro de unas u otras pueden ser construidas (*reglas de transformación*, por ejemplo: “si una expresión es compuesta de símbolos combinados de cierta manera, y si otra se compone de símbolos combinados de otra manera, entonces la segunda puede ser deducida de la primera”). Así, el sistema de un lenguaje con su estructura formal puede considerarse como cálculo.

Carnap distingue entre sintaxis pura y descriptiva. La sintaxis pura concierne a las posibles estructuraciones de las expresiones del lenguaje, sin tener en cuenta la naturaleza de las cosas que constituyen los diferentes elementos de las expresiones. En la sintaxis pura solamente las definiciones son formuladas y se desarrollan las consecuencias de tales definiciones; es enteramente analítica, no tiene contenido y se presenta como un análisis combinatorio.

La sintaxis descriptiva concierne tanto las propiedades sintácticas como las relaciones con las expresiones empíricas dadas, por ejemplo, en las aplicaciones de geometría, es necesario introducir las llamadas definiciones correlativas entre las clases de objetos empíricos y sus correspondientes clases de elementos sintácticos. De esta manera, las expresiones de la sintaxis descriptiva podrían aclarar y designar las expresiones sintácticamente correctas.

### 3. NOCIONES Y ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

La presentación que realiza R. Carnap sobre el *Lenguaje*, las disciplinas que le corresponden, la estructuración y el lugar y elementos de la *sintaxis*, plantea de manera sintética los lineamientos, ejes y estructuraciones que trataremos en este artículo. De esta manera, estos planteamientos nos sitúan dentro del campo de la *Lógica Moderna* llamada *Lógica Matemática*, apelación que marca su carácter propio y su diferencia con respecto a la *Lógica Clásica*.

La *lógica Matemática* se presenta bajo dos formas sucesivas: el *álgebra lógica* de G. Boole y la *logística* creada por G. Frege. Esta separación no es muy neta debido a la relación estrecha que une la lógica y las matemáticas.

En el primer caso, Boole se propone construir un *órganon* lógico sobre el modelo de las matemáticas y aquí la matemática es un medio para resolver los problemas de lógica, es entonces una teoría matemática particular, que se pre-

señala bajo una forma deductiva, que presupone la validez de leyes lógicas de la deducción (Blanche-Dubucs, 1996 p. 302)<sup>8</sup>.

En el segundo caso, la lógica se interesa a las reglas de razonamiento deductivo y a las leyes que las justifican, es también producto de los matemáticos pero orientada de manera diferente: no hay un interés en la lógica como ciencia sino a la lógica en el desarrollo del discurso matemático, expresando la matemática bajo una forma lógicamente rigurosa: la lógica es auxiliar de la matemática y la teoría de la deducción es un medio para alcanzar una rigurosidad dentro de los desarrollos en las matemáticas (Blanche-Dubucs, 1996 p. 302)<sup>9</sup>.

La justificación está dada, en el sentido que el matemático, al demostrar un teorema, corrientemente no se preocupa si su demostración es válida, se confía de una *intuición lógica*, pero esta puede ser errónea, por lo cual es necesario precisar la materia sobre la cual se fundamenta para despejar y formular sus resultados, al lado de los principios propios de la teoría matemática. De ahí, la necesidad de organizar los principios lógicos en un sistema teórico.

Así mismo, en este caso, algunos seguidores de esta línea Frege (1999), Russell (Whitehead, Russell, 1910-1913) van más allá y pretenden asegurar la fundación de la matemática en la lógica, a partir de la forma deductiva lo cual permite derivar el conjunto de nociones y de verdades matemáticas a partir de las nociones y verdades propiamente lógicas. De manera que, al mismo tiempo que la lógica asegura el fundamento de la matemática, asegura también sus propios principios. Pero para que las bases sobre las cuales el lógico pretende soportarlas sean definitivas, es necesario que los términos primarios de la lógica tengan un sentido completo y claro, con el fin de que estas proposiciones sean verdades categóricas y que puedan comunicarse con aquellas de las matemáticas. Con esta condición, esta nueva lógica (*logística*<sup>10</sup>, Scholz, 1968, p. 91) puede presentarse como dogmática y absolutista lo que la impulsa a desarrollarse hacia otras perspectivas, así:

- 
- 8 “...de ahí su posición bastante paradójica: las leyes lógicas, por medio de una interpretación conveniente, podrían encontrarse dentro de sus teoremas; sin embargo, no se puede decir que ella [la lógica] las demuestre, porque cualquier demostración presupone precisamente la validación de las leyes que regulan sus desarrollos; habría entonces un círculo vicioso”.
- 9 “Esta actitud es particularmente neta en Peano y en los matemáticos italianos agrupados alrededor de él. Ellos no se proponen expresamente, dice Couturat, un sistema lógico completo y coherente; inventaron la notación para poder escribir en símbolos las proposiciones matemáticas y desarrollaron sus algoritmos en la medida que tuvieron necesidad para analizar y verificar las demostraciones matemáticas”.
- 10 “La *Logística* es la primera lógica formal construida de manera estrictamente sintética [...] es la primera lógica que sube metódicamente de lo simple a lo complejo”. H. Scholz : *Abriss der Geschichte der Logik*, 1931. Traducción francesa: *Esquisse d'une histoire de la logique*. Paris, Aubier-Montaigne, 1968.

- Se extiende el dominio de la nueva lógica, de la matemática al conjunto de las ciencias (física, biología, psicología, fisiología, teoría de circuitos eléctricos...). De manera que, amplía y flexibiliza el instrumento lógico hacia nuevas lógicas. Enriquece el lenguaje con el fin de dar cabida a enunciados de tipo imperativo o normativo aparte de los declarativos. Esta lógica tiende entonces a ser una *lógica general* y no solamente un lenguaje para uso matemático<sup>11</sup>.
- La nueva lógica se propone despejar y enunciar explícitamente las leyes de la deducción, presentándola bajo la forma de una teoría deductiva axiomatizada que es progresivamente impulsada hacia una *formalización*. Así, con la simbolización del discurso lógico y la introducción sistemática de los procedimientos de cálculo, en donde se pretende borrar cualquier llamado a la *evidencia*, se pasa así de una *axiomática ingenua*, intuitiva a una *axiomática completamente formalizada*, reduciendo la aplicación de las reglas de cálculo a signos. De esta manera se puede controlar objetivamente el proceso de desarrollo del lógico cuando sigue exactamente las reglas de juego propuestas, dejando fuera cualquier discusión sobre el valor mismo de ese sistema de reglas. Es así que, el desarrollo de la formalización ha obtenido un desarrollo inimaginable.
- Fuera del imperio axiomático, se prevé otros modos de concepción de la lógica, por ejemplo Wittgenstein y Post, para el cálculo de proposiciones, proponen las *tablas de verdad*, lo cual conduce a un procedimiento de decisión: se puede reconocer de manera directa si una fórmula dada de cálculo es o no una ley de lógica. Calcular, es entonces, una forma de actividad para lo cual se necesitan ciertos *preceptos* para su realización y no se necesitan los axiomas a la base de este cálculo, que se justificarían dentro de una concepción absolutista de la lógica. Gentzen, a su vez, construye un "cálculo de secuencias", de gran simplicidad y homogeneidad que tiene además la ventaja de ser un método de "deducción natural".
- Después de varios desarrollos diferentes a la tesis logicista, nos acercamos a una lógica más neutra con respecto a las tesis de fundamentación de las matemáticas, dejando, en parte, el absolutismo lógico. Wittgenstein, en el *Tractatus Logico-philosophicus*<sup>12</sup>, vacía de cualquier substancia el con-

11 Carnap se propone dar las bases al Lenguaje de la Ciencia a partir de los presupuestos de su concepto de la lógica.

12 Publicada en los *Annalen des Naturphilosophie*, Leipzig 1921, luego en Londres por Kegan Paul, edición bilingüe, introducción de Russell, 1922. Traducción francesa de P. Klossowski, París, Gallimard, 1961.

tenido de la lógica y la reduce a la pura forma. Las proposiciones de la lógica son *tautologías*, privadas de cualquier contenido (Wiitgenstein, 1961, pr. 5.43):

*“las proposiciones de la lógica dicen la misma cosa, a saber: nada”.*

Igualmente surgen las primeras lógicas trivalentes y además múltiples lógicas nuevas, creando de esta forma una *revolución epistemológica*, sabiendo por ejemplo, que una tautología en un sistema lógico puede cesar de serlo en otro sistema. Por otro lado, con Hilbert (Hilbert, Bernays, 2002), la selección del sistema lógico es libre, cuya única condición es no caer en la contradicción (permitir a la vez demostrar una proposición y la misma proposición afectada por la negación).

En este sentido, Carnap presenta así el *principio de tolerancia de la sintaxis* (Carnap, 1937, pr. 17):

*“Nuestro problema no está en proclamar las prohibiciones, sino llegar a convenciones ... en lógica no hay moral. Cada uno es libre de construir a su manera su propia lógica, es decir su propia forma de lenguaje”.*

En consecuencia, el absolutismo y su fundamento realista cesan de imponerse al lógico como dogma, llegando a un equilibrio entre el razonamiento más o menos intuitivo de los primeros lógicos y del cálculo ciego sobre signos de los desarrollos posteriores.

Basados en estos desarrollos de la Lógica Matemática se distinguen varios ejes de estudio:

- El cálculo de proposiciones o enunciados, el cual estudia las proposiciones desde dos conceptos: la bivalencia (si la proposición es verdadera o falsa) y la verifuncionalidad (determinar el método o función de verdad que la valide). Aquí se van a despejar las leyes y propiedades fundamentales que permiten explicar el concepto de inferencia válida en virtud de la forma lógica, comprendiendo así la sintaxis y la semántica del lenguaje dado.
- El cálculo de predicados, toca la estructura de las proposiciones o enunciados elementales o atómicos. Este cálculo es más rico y complejo que el anterior pero conserva las principales propiedades, de manera que las proposiciones, consideradas como atómicas, es decir indivisibles, se analizan en un símbolo incompleto y una cadena de símbolos o argumentos que lo completan.

- Lógica modal y plurivalente, caracterizada esencialmente por el empleo de ciertos operadores y la admisión de otros valores diferentes al verdadero y falso.

#### 4. NOCIÓN DE LENGUAJE

La lógica Matemática en su desarrollo vira hacia una disciplina altamente especializada y diversificada, en la cual la noción de *lenguaje* se vuelve central (como se ve en la presentación de Carnap), dando a la Lógica un esquema conductor para sus aplicaciones y una cierta unidad dentro de sus especialidades. Se admite así, que se le debe a Frege (1879, 1999), la primera empresa de construcción de un *lenguaje formalizado*, en donde la lógica matemática no es otra cosa que el estudio de la lógica que procede de la construcción de un lenguaje formalizado; es un *Lenguaje Artificial* con respecto al Lenguaje Natural u Ordinario, en el cual se presentan ambigüedades y lagunas no propias a un lenguaje lógico.

En su obra *Begriffsschrift* (Frege, 1879, 1999), presenta un *lenguaje* que expresa una representación lógica con la exigencia de explicitar lógicamente las relaciones de deducción y precisar los términos que tienen como objeto las definiciones precisas; así mismo que su dinámica determinada por reglas y operaciones explícitas, en donde las proposiciones son compuestas y derivadas.

De su lado, Wittgenstein en el *Tractatus*, busca los *límites del lenguaje*, marcando la diferencia entre lo “decible” (lógico) y lo “indecible” (lo que se muestra), que determina a su vez las márgenes de las expresiones con *sentido* y las expresiones *sin sentido*.

De esta manera, el *lenguaje* se presenta bajo diferentes connotaciones en el contexto de la lógica matemática, cuya terminología no está completamente fijada y muestra diferentes puntos de vista (Rivenc, 1989, pp. 36-37)<sup>13</sup>:

- Ciertos autores describen como *lenguaje*, lo que Church (1956) llama, *sistema logístico* o *cálculo no interpretado* (según Carnap, 1934), por ejemplo, el sistema formado por los símbolos primitivos dados y las reglas de formación y de transformación, sin ninguna consideración semántica.
- El Carnap (1939), presentado en este artículo, amplía la noción de lenguaje a elementos en vía de la realización de comunicación, incluyendo la interpretación o la semántica.

13 François Rivenc nos presenta estas connotaciones. *Introduction à la logique*. Paris, Payot, 1989; p. 36-37.

- El Lenguaje como un conjunto de símbolos con las reglas de formación de las formulas y sus interpretaciones; los axiomas y reglas de inferencia serían consideradas ulteriormente como parte de la “definición de lógica” para este lenguaje.
- El Lenguaje (formalizado) es el que exhibe, manifiesta o reproduce la estructura o la *forma lógica*, lo que no se puede realizar con un lenguaje ordinario. La formalización puede ser regulada por un “lenguaje lógicamente perfecto”, que reflejaría “como un espejo” la estructura lógica del mundo (punto de vista de Russell<sup>14</sup> y Frege).
- Quine (1977, cap. V)<sup>15</sup> pretende la simplificación de la teoría lógica con el fin de generalizar los artifices de la notación de la lógica moderna y poder extenderla a los enunciados particulares del lenguaje ordinario.

Estas diferentes connotaciones muestran los diferentes desarrollos de un lenguaje lógico formalizado, en el cual a nivel general (salvo en la primera) se puede aseverar las tres disciplinas que lo conforman, propuestas por el Carnap de 1939 (Sintaxis, Semántica y Pragmática).

Igualmente, dentro de estos desarrollos, a la pregunta sobre las condiciones de posibilidad y validez de este lenguaje, se pueden reconocer dos ejes principales del lenguaje de diversa naturaleza, presentados dentro del *Tractatus* de Wittgenstein (Hottois, G., 2002, pp. 138-139), así:

- a. La naturaleza proposicional y analítica, correspondiente a la sintaxis del lenguaje.
- b. La naturaleza representacional, correspondiente a la semántica del lenguaje.

### Naturaleza Proposicional y Analítica

La *analicidad* del lenguaje corresponde a la posibilidad que tiene éste de descomponerse en elementos y en la existencia de *elementos últimos y estables*

14 Russell en *The Philosophy of Logical Atomism*, 1918 dice: “Un lenguaje lógicamente perfecto [...] sería completamente analítico y revelaría como un espejo la estructura lógica de los hechos afirmados o negados. El lenguaje construido en los *Principia Mathematica* es concebido como siendo un lenguaje de este tipo. Es constituido de una sintaxis y no contiene vocabulario; [pero] está concebido para que al agregarle un vocabulario se tendría un lenguaje lógicamente perfecto”. Citado por François Rivenc *Introduction à la logique*. Paris, Payot, 1989; p. 37.

15 QUINE, Willard van Orman: *Word & Object*, MIT Press, 1960; Traducción francesa: *Le Mot et la Chose*, par Dopp y Gochet; Paris, Flammarion, 1977; capítulo V.

que le dan al lenguaje su condición de existencia. Así mismo, el elemento constitutivo del lenguaje es la *proposición*, la cual no tiene *sentido* sino cuando es totalmente analizable: *comprender* una proposición es, en alguna medida, efectuar su análisis. Este corresponde a presentar una explicación radical (sin ninguna indeterminación), en donde el contenido de la proposición debe ser “presentada delante de nuestros ojos”.

Se puede distinguir varios tipos de *proposiciones*: la proposición *elemental o atómica* (“p”), la proposición *compuesta* (“p v q”) y dos tipos de proposiciones *especiales*: las *tautologías* y las *contradicciones*.

Una *tautología* es una proposición del cálculo de proposiciones cuyo valor es *Verdadero* siempre, en cualquier tipo de interpretación. Su verdad no depende de lo que pasa en el *mundo* inscrito porque es verdadera en cualquiera de los *mundos*. Una *contradicción o antilogía*, al contrario, su valor es *falso* siempre.

Así, por ejemplo una proposición como “p v ¬p” es una tautología, que corresponde a la definición misma del conector “v”, se dice que las tautologías son verdaderas en virtud de su *forma lógica* y no por la interpretación sobre el mundo. Las tautologías expresan principios de la lógica, por ejemplo, algunas de ellas:

$p \equiv \neg\neg p$ : principio de identidad proposicional.

$p \vee \neg p$ : principio del tercer excluido.

$\neg(p \wedge \neg p)$ : principio de no- contradicción.

$(p \vee q) = (q \vee p)$ : principio de conmutatividad de “v”.

$(p \wedge q) = (q \wedge p)$ : principio de conmutatividad de “Λ”.

Así mismo, Wittgenstein distingue dos tipos de análisis:

- A partir de signos simples, que son los *nombres (análisis nominal)*, la proposición presenta así un sentido perfectamente determinado. La proposición elemental o atómica es “verdadera” o “falsa” y no comporta partes “verdaderas” o “falsas” por sí solas.
- A partir de la noción de “verifuncionalidad” que une las proposiciones elementales.

El primer tipo responde a la noción esencial de articulación. Si los elementos constitutivos del lenguaje son proposiciones (eje proposicional), significa que las palabras aisladas, sin articulación, no son lenguaje por sí solas. La proposición analizada es la proposición expresada de tal manera, que la articulación del sentido aparezca en su estructura.

Por ejemplo, para dos proposiciones elementales: “p” (“está nevando”) y “q” (“hace sol”), las dos proposiciones verdaderas, la proposición compuesta “ $p \wedge q$ ” (“está nevando y hace sol”), está articulada y es verdadera, según el conector “ $\wedge$ ”.

El segundo tipo responde a la función de verdad<sup>16</sup> y la proposición se expresa, por ejemplo, según una *Tabla de Verdad*<sup>17</sup> de proposiciones elementales. De esta manera, el lenguaje puede ser descompuesto en sus elementos, señalando que existen elementos últimos y estables y la proposición tiene sentido si es completamente analizable y comprenderla es efectuar este análisis integral, excluyendo toda ambigüedad.

Por ejemplo, la Tabla de Verdad de la proposición compuesta “ $p \wedge q$ ” corresponde a:

P	Q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Aquí, “ $p \wedge q$ ” es verdadera si y solamente si “p” y “q” son verdaderas y falso en todos los otros casos.

La analicidad exige un procedimiento legítimo para explicitar lo compuesto y la elementalidad, de manera que se presente una relación biunívoca entre los nombres y objetos representados: un nombre por un objeto y un objeto por un nombre. Lo “compuesto” posee dos propiedades: la función de verdad de las proposiciones elementales y la propiedad de “generalidad”<sup>18</sup> que depende

16 La Función de Verdad se identifica a toda proposición compuesta de la Lógica de Proposiciones cuyos valores varían a partir de los valores de los enunciados simples que la componen. El cálculo de estas variaciones se puede hacer con la ayuda de una *Tabla de Verdad*.

17 *Tabla de Verdad* entendida como un procedimiento de decisión, permitiendo de una manera semimecánica, saber en qué caso una expresión es verdadera y en particular de decidir si la expresión es verdadera para todas las substituciones de valores de sus variables. Para tal uso, no se necesita ninguna utilización de la imaginación, como es el caso de la demostración.

18 La proposición “(para todo x) y x”.

de la manera como las variables se especifican, esta última se asegura por las proposiciones compuestas. La “elementaridad” asegura la finitud y la univocidad del análisis con las proposiciones elementales e igualmente define y estabiliza el sentido del lenguaje.

De esta manera, “Tener sentido” y “ser analítico” son equivalentes y en estos casos se distinguen el “sentido y la denotación” (según Wittgenstein):

*Sentido y denotación*<sup>19</sup>

El sentido de una proposición está dado por su estructura lógica, que presenta las condiciones de posibilidad de la proposición, de ser *verdadera o falsa*. Pertenece al campo de la sintaxis y *denota o reenvía* a los objetos extralingüísticos que son las referencias de los nombres, sin los cuales el lenguaje se quedaría sin referente, llevaría al infinito o a un círculo vicioso. Los objetos fijan la semántica del lenguaje. Es así que el sentido lleva a la *denotación* del objeto a través de un cálculo. El sentido y la denotación son contrarios en su orientación: el sentido es intralingüístico (está dentro del lenguaje lógico) y la denotación y por tanto la verificación de la verdad de la proposición es extralingüística poniendo en relación el lenguaje y la realidad

En esta perspectiva, toda proposición tiene un *sentido*; la *denotación* no se aplica sino a las expresiones simples (palabras), no a las proposiciones o enunciados (que sean simples o compuestos). Las expresiones que tienen una denotación se asimilan a nombres propios y los nombres propios no tienen un sentido, ellos designan o hacen referencia a una cosa, objeto o persona.

Técnicamente, comprender el sentido de una proposición es saber cómo el enunciado o proposición puede ser resuelto, de una manera transparente (“tabla de verdad”, un procedimiento de cálculo o un algoritmo), de manera que una proposición de la forma “ $p \wedge q$ ”, indique que no es verdadera sino en el caso que “ $p$ ” y “ $q$ ” son verdaderas simultáneamente.

---

<sup>19</sup> Esta problemática del “sentido y denotación” (denotación entendida también como referencia) se ha presentado desde los desarrollos de la *Escolástica*, con la diferencia entre *vox* (signo, sonido) y el *sermo* (significado). G. Frege va a traer la problemática en 1892 (*Sinn und Bedeutung: “Ecrits Logiques et Philosophiques, Paris, Seuil, 1971, pp. 102-126*), al interrogarse sobre el límite exacto de la relación de identidad (Si “ $A=B$ ”, se refiere al significado del signo como tal o a lo que él representa?). La diferencia entre Wittgenstein y Frege, es que el primero concierne la articulación de los términos y solo los nombres tienen una denotación o una referencia y la proposición articulada tiene un sentido; y para Frege tanto las proposiciones como los nombres tienen sentido y referencia.

### *Naturaleza Representacional del Lenguaje*

El lenguaje se refiere a la realidad extralingüística, así la proposición compuesta no se verifica inmediatamente, porque ella es el resultado de operaciones de cálculos o de combinaciones cuya efectuación es independiente de la inspección de los objetos reales. De manera que, la relación *lenguaje-realidad* se produce sobre la proposición elemental, donde existe el “hecho” que la proposición describe.

Se puede decir que estos lineamientos del lenguaje lógico, nos conducen a presentar las *Características del Lenguaje*, así:

- Explícito: la necesidad de presentar una anotación material, en donde el *sentido* de la proposición sea claramente expresado.
- Unívoco: sin ninguna ambigüedad, ni plurivocidad que pueden llevar a la confusión y a la indecisión: *a cada nombre corresponde un objeto*.
- Funcionalidad: es el complemento *operacionalista* de la exigencia de la unívoco: *a todo signo corresponde una función*.
- Distinción de niveles lógicos: debe ser claro si se está tratando de lo *real* (*hechos*) o del lenguaje lógico o *lenguaje objeto* (proposición atómica, proposición compuesta, nombre...), o del *metalenguaje*, lo que evitaría la *confusión de los tipos o categorías* del lenguaje (Russell<sup>20</sup>, Ryle, ...). En esta última opción, debe precisarse a qué nivel *metalingüístico* pertenece. Una distinción importante es la del *nombre propio* y los *predicados*.

El nombre propio designa un objeto (una referencia extralingüística), pertenece al *lenguaje de los objetos*, es decir un lenguaje inmediatamente referencial (directamente articulado al real extralingüístico).

El término predicativo describe una clase de objetos, es decir que se refiere a una colección de nombres propios<sup>21</sup>. El predicado pertenece, entonces, a un nivel “metalingüístico”: aquello que designa un predicado no es un objeto extralingüístico sino un constructo lingüístico (*la clase*). Las “casas son azules” pero “el azul” como cosa no existe. Así, dentro

20 RUSSELL, Bertrand (1910).

21 Para aclarar, veamos un ejemplo en lenguaje ordinario: para afirmar que “las casas son azules”, es necesario identificar ciertas cosas como “casas” y designarlas como siendo “casa”. La palabra “casa” funciona como un “nombre propio” del objeto designado.

de un lenguaje lógico la naturaleza o uso de un término debería expresarse claramente<sup>22</sup>.

## 5. ELEMENTOS DEL LENGUAJE FORMAL

A nivel general, se pueden discernir los elementos del lenguaje a partir de las nociones presentadas, se tiene: el *Metalinguaje y Lenguaje Objeto*, los *Símbolos y Signos* y las *Reglas*.

### Metalinguaje y Lenguaje Objeto

La dinámica de una Lenguaje formal produce una cadena de símbolos contruidos y estructurados conforme a reglas y que pueden ser interpretados posteriormente, como por ejemplo:

*Para "1+1=4" si y solamente si 1=2*

*Proposición elemental "p: 1+1=4"*

*Proposición elemental "q: 1=2"*

*Proposición compuesta, la cadena de símbolos contruidos sería:*

*"(q ⊃ p) ∨ (p ⊃ q)" o "p ≡ q"*

Según la presentación de Carnap, el lenguaje de la cadena de símbolos es el *Lenguaje Objeto*, pero la explicación de esta cadena de símbolos necesita un lenguaje, que puede ser el español corriente, eventualmente enriquecido de notaciones y de términos matemáticos cuyo uso será requerido, en ciertos casos; tal lenguaje se llama un *metalinguaje* o lenguaje del observador<sup>23</sup>.

El *metalinguaje* debe disponer primeramente de los *nombres* de los símbolos, expresiones y formulas del lenguaje objeto; así mismo debe disponer de las *variables* que permiten hablar de manera general de símbolos o expresiones (las variables cuyos valores posibles son los símbolos o expresiones del lenguaje objeto); e igualmente las *constantes lógicas o conectores*<sup>24</sup>. De esta manera permite la formación de proposiciones estructuradas según las reglas establecidas.

22 Gran parte de los errores lógicos vienen de esta falta de distinción que son corrientes en el lenguaje natural.

23 El prefijo *meta* marca la diferencia que separa el lenguaje objeto propiamente dicho y el discurso sobre el sistema.

24 Es posible utilizar la convención familiar según la cual se obtiene un nombre de una palabra o de un símbolo incluyendo las comillas (" ") en esa palabra o símbolo, que significa *mencionar* la palabra o símbolo encerrado en comillas. Según esta convención, se puede decir por ejemplo, a propósito de uno de los conectores del lenguaje objeto: "¬" es un símbolo lógico.

A nivel general, el *metalenguaje* hace parte de la estructuración de niveles lógicos que ha sido definido para corregir los problemas lógicos de autoreferencia o reflexibilidad e igualmente de indecidibilidad, de manera que no se pueda incluir en el conjunto E el nombre que permite designar este conjunto y el criterio o término que lo identifica, con el fin de que un nombre que designa los objetos, no sea utilizado para designarse a sí mismo como uno de los objetos; se diferencia entonces el conjunto “E” del término que permite identificar este conjunto, respetando así los diferentes niveles lógicos<sup>25</sup>.

## Símbolos y Signos

La lógica, por vocación, renuncia a presentar una teoría general del conocimiento simbólico, se preocupa solamente de construir su edificio propio sobre una base cuya solidez sea reconocida generalmente. Así, el *símbolo* es un ser abstracto, como el utilizado en matemáticas y los *signos* trazados en papel, pantalla de computador, tablero...etc, sirven solamente para evocarlo<sup>26</sup>.

De esta manera se tienen como signos primitivos del lenguaje, por ejemplo, los siguientes:

### *Variables*

- $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1 \dots$  : representan proposiciones atómicas o elementales.
- $A, B, C \dots$  : representan variables metalingüísticas para representar cualquier tipo de proposición.

### *Constantes lógicas y conectores*

Son instrumentos de articulación de las proposiciones, razón por la cual la proposición puede estructurarse como “función de verdad”; son considerados como signos puramente operatorios, no tienen sustancia propia, no representan nada y por consecuencia no tienen ninguna representación o referencia en el mundo de los hechos, ellos son, entre otros:

- $\neg$ : no;
- $\supset$ : implica;
- $\vee$ : o (disyunción);
- $\rightarrow$ : si...entonces (condicional);

25 El metalenguaje fue planteado por Russell en su *Teoría de Tipos* y en Hilbert con la presentación de la *Metamatemática*.

26 Es la misma situación del matemático que puede estudiar un círculo cuyo diámetro es igual a aquel del sol, trazando solamente una figura muy aproximada de ese círculo.

- $\leftrightarrow$ : si y solamente si;  $\equiv$ : bajo la forma de equivalencia, se usa para definiciones.

## 6. SINTAXIS Y SUS ELEMENTOS

En síntesis y de acuerdo a los lineamientos aportados por Carnap y Wittgenstein, la sintaxis de un lenguaje puede ser vista como la que concierne su estructura y sus propiedades, fuera de toda referencia a una interpretación intuitiva de sus símbolos (Martín, 1964, p. 33). Martín nos presenta dos formas de ver sus elementos: en el lenguaje mismo y con respecto a otros lenguajes.

### Lenguaje mismo

Una de las primeras tareas de la sintaxis es la de formalizar las convenciones de escritura, en la cual se introducen *abreviaciones* para aligerar la escritura o para definir ciertas propiedades del lenguaje. Se puede, por ejemplo, anotar " $A \vee B$ " la expresión " $\neg A \supset B$ ", en donde " $A$ " y " $B$ " son fórmulas, o " $A \& B$ " la expresión " $\neg(A \supset \neg B)$ ". En estas anotaciones los signos "&" y " $\vee$ " pertenecen al "metalenguaje". El interés de estas abreviaciones se apreciará cuando se demuestre que ellas poseen ciertas propiedades, por ejemplo que " $\vee$ " y "&" son conmutativos, en el sentido que " $(A \vee B) \supset (B \vee A)$ " y viceversa " $(B \vee A) \supset (A \vee B)$ ".

Además, la sintaxis permite presentar *definiciones* nuevas enunciadas en el metalenguaje, que posibilitan la introducción de nuevas nociones importantes para el desarrollo de la sintaxis. Una primera noción es la *deducción*, que generaliza la definición de *demostración*, y representa la tarea más importante de la sintaxis.

La *deducción* obedece, entonces, a las reglas usuales de la lógica, utilizando el principio de *recurrencia*; las *demostraciones* en sintaxis comportan elementos intuitivos y utilizan no solamente los recursos habituales de la lógica, sino también aquellas de las matemáticas. De ahí, una dificultad preliminar (que ya hemos mencionado): un círculo vicioso al emplear una forma de razonamiento típicamente matemático para estudiar un lenguaje lógico, cuando justamente se espera que este lenguaje dé luces sobre la naturaleza de la deducción lógica en general y particularmente de la deducción en matemáticas<sup>27</sup>.

27 De esta manera, se define el alfabeto de un lenguaje lógico como un *conjunto* de símbolos, donde se distinguen *sub-conjuntos*. Las variables se han numerado, tales  $a_1, a_2, \dots$ , utilizando la cadena de *números enteros*. Pero si, para construir una lógica que permite formalizar las matemáticas, se debe recurrir a

De manera que, la tarea de la lógica en general y de la *deducción* en particular consiste en presentar y guiar un discurso coherente sobre las formas del discurso mismo, con el espíritu de conferir la *consistencia* y evidentemente se deben utilizar formas matemáticas elementales que no sean superiores a las formas lógicas, para romper el círculo vicioso anotado.

Así, una de las tareas de la sintaxis, en la deducción, es discernir el uso de razonamientos matemáticos y de caracterizar de manera precisa la matemática a la cual se pudiere recurrir, según el objetivo que se busque<sup>28</sup> (Martín, 1964, pp. 46-47). La deducción generaliza, entonces, la demostración, facilitando así la efectividad, el rigor y su posible mecanización de todo el sistema de la sintaxis lógica.

Para desarrollar una *deducción* efectiva se consideran tres propiedades definidas, así:

*Consistencia*: el resultado de la aplicación de reglas de la sintaxis no puede producir simultáneamente una proposición y su negativa; llamada no-contradicción por Hilbert (que “ $p$ ” y “ $\neg p$ ” sean verdaderas).

*Completitud*: asegura la estructuración de la totalidad de las proposiciones verdaderas por medio de un conjunto de reglas que va a garantizar tanto la completitud como la consistencia, o bien los resultados de la aplicación de las reglas de sintaxis es no-completo y no-consistente.

*Decidibilidad*: si existe un procedimiento efectivo<sup>29</sup> que permite para toda fórmula arbitrariamente dada, decidir si es o no una tesis<sup>30</sup>.

---

nociones específicamente matemáticas, se encuentra un problema que debe ser resuelto (objeción de Poincaré a los primeros trabajos de Hilbert).

28 Es la posición adoptada por Hilbert, que perseguía fundar las matemáticas por medio de la *formalización*, es decir reconstruirlas con máxima solidez, toma como instrumento metamatemática una *matemática débil* como la aritmética finitista. En esta *aritmética concreta*, los objetos y sus propiedades se toman con plena certeza. Una *cifra* se considera como una *abreviación* (para una cadena de “1”: 2 abrevia la cadena “1,1”...). Las operaciones de adición y de multiplicación se definen concretamente a partir de la noción de *cifra*. Sus propiedades se establecen por medio de una *inducción* completa apoyada en una *construcción efectiva* de la cadena de enteros. Aquí, hay una deducción que se basa en la construcción concreta de cifras.

En analogía a la designación de Hilbert, los lógicos de Warsaw (Lukasiewicz y otros) han hablado del “cálculo meta-proposicional”, de *metalógica*. Sin embargo la palabra “metalógica” es una designación para el subdominio de la sintaxis que utiliza frases lógicas en un sentido estricto.

29 *Procedimiento efectivo* es aquel que permite llegar a un resultado, al término de un número finito de etapas, en las cuales solo se utilizan operaciones definidas con anterioridad. Esta definición es un poco imprecisa, se vuelve más rigurosa, si se traduce a lenguaje matemático utilizando la teoría de las *funciones calculables* (funciones recursivas que incluyen los procedimientos efectivos).

30 Desgraciadamente, solo los sistemas bastante pobres en medios de expresión son decidibles.

Con estas propiedades se perfila una *sintaxis* como *cálculo* que nos ha presentado Carnap en su *sintaxis lógica*, en donde es la aplicación de reglas formales sobre *signos* desprovistos de contenido, que los lenguajes pueden desarrollar los cálculos aplicados a la deducción y por lo cual estos lenguajes evolucionan en su estructura sintáctica. Así, son estas reglas que retoman toda su importancia, porque son ellas que van a determinar la *formación* de las expresiones, especificando las propiedades, la relación de signos, las posibilidades de estructuración entre ellos, que proporcionan lo que se llama una “expresión bien formada” (EBF). Así, a partir de las *reglas de formación*, se puede tener:

- Toda variable es una “EBF”.
- Si “p” es una “EBF”, entonces “ $\neg p$ ” es una “EBF”.
- Si “p” y “q” son “EBF”, entonces “ $p \vee q$ ” es una “EBF”.

Así mismo, las reglas sintácticas aseguran la *transformación* de las expresiones en una deducción, donde se está en el dominio de lo operativo, del cálculo en sí mismo, y que en este caso del cálculo es un procedimiento efectivo, casi mecánico, que proporciona los resultados de la deducción. El procedimiento más simple para la construcción de un cálculo consiste en seleccionar algunas frases como frases primitivas (algunas llamadas como postulados o axiomas) y algunas reglas de inferencia.

Las *Reglas de Transformación* muestran qué “manipulaciones” son toleradas y cuáles no, es decir las reglas que no alteran la validez dada como punto de partida; por ejemplo, la condición para que una regla de sustitución, que puede reemplazar en una proposición válida una variable por una “EBF” y que puede producir una nueva proposición válida.

El uso de estos dos tipos de reglas asegura la presentación del esquema deductivo, como:

Una cadena de “EBF”, las cuales pueden ser: un axioma, la consecuente de tal esquema, en donde el antecedente precede el consecuente, la última proposición del esquema es un teorema (objeto de la demostración y constituye una “EBF” muchas veces con el mismo título de los axiomas, puede ser reutilizado en otra demostración y puede ser una proposición refutable cuya negación se deriva del sistema).

### Sintaxis en las relaciones con otros lenguajes

En este caso, la *sintaxis* puede ser considerada según las relaciones entre dos o más lenguajes, provistos de léxicos, y de reglas de formación y de trans-

formación semejantes; se pueden presentar, por ejemplo, dos lenguajes donde uno de los dos es más *fuerte* que el otro (S y  $S^1$ -mas fuerte-), de manera que toda formula demostrable en S es demostrable en  $S^1$ , pero ciertas formulas demostrables en  $S^1$  no pueden ser demostrables en S. El interés de contar con este tipo de sintaxis surge del hecho que es posible demostrar ciertas propiedades de un sistema en relación con un sistema más débil, por ejemplo, la aritmética elemental en relación con la teoría de conjuntos<sup>31</sup>.

Esta sintaxis de relaciones, proporciona dos propiedades importantes del lenguaje: la *fuerza* y la *consistencia relativa*. Martin (1964, pp. 40-51) presenta estas propiedades como la posibilidad de demostrar y de traducir un lenguaje en otro. Así, la *fuerza* es comparable al número y a la cualidad de los medios de expresión del lenguaje, de ahí el interés de distinguir netamente en la sintaxis del lenguaje, lo que es del recurso de una teoría débil o de expresiones elementales y lo que exige una teoría fuerte o expresiones fuertes.

## 7. CONCLUSIONES

A lo largo de este estudio se ha puesto el acento sobre el *lenguaje formal*, donde se considera la *formalización*, como herramienta para la construcción de este tipo de lenguaje, dando a la *deducción* y por lo tanto a la *sintaxis* el rigor y la precisión necesaria para fundamentar el desarrollo y la dinámica de un lenguaje formal. Una de las preguntas que resulta de esta formalización es el alcance de esta, es decir su *límite*, o la pregunta ¿hasta dónde se llega con la formalización en un lenguaje, en general y de la síntesis en particular?

En este sentido, se conocen ciertos límites trazados históricamente: el teorema de Lowenheim (1915) y sus etapas de generalización de Skolem (1920-1925), el teorema de Gödel (1931), o los límites presentados por los lógicos de los años 36 (Turing, Post, Church, Kleene). Límites que son alertados desde las llamadas *paradojas*, como la de "El Mentiroso"<sup>32</sup> planteada por Bertrand Russell, "cadenas de números en cadenas de letras" por Richard, "la clase de clases" de B. Russell...etc. Paradojas que son el índice de una carencia fundamental de la lógica confrontada a enunciados indecidibles, donde no se tienen aún soluciones completas. Lo que es interesante, en el planteamiento de estos límites, es la

31 En este sentido Gödel demostró en 1939, su teorema, presentando la noción de consistencia relativa donde un sistema  $S^1$  es consistente con respecto a un sistema S, si la consistencia de  $S^1$  contiene la consistencia de S.

32 El poeta cretense, Epiménedis (VII siglo, a.c.) afirma: "todos los cretenses son mentirosos" (p). Cómo decidir de la valor de verdad de "p"? Si "p" es verdad, como Epiménedis es cretense y entonces mentiroso, "p" debe ser falso. Se necesitaría que "p" sea falso para poder ser verdadera, lo que es absurdo.

estructuración de problemas, que van a desarrollarse y que tienen como punto de partida el *teorema de limitación*, de Gödel<sup>33</sup>. Él va a demostrar que existen lenguajes formalizados de una cierta potencia que contienen proposiciones que corresponden a enunciados verdaderos pero, sin embargo son indecidibles o sin procedimiento de demostración.

Las problemáticas tratadas a partir de Gödel, corresponden, en la mayoría, a los procedimientos decidibles referidos a la metamatemática y a la decidibilidad en sí misma, como aplicabilidad de estos procedimientos. Se plantea de un lado, la necesidad de una metamatemática estrictamente finitista, lo contrario llevaría a una regresión al infinito. De otro lado, se requiere una metamatemática totalmente operacional. Aquí, se presenta un límite fundamental a la decidibilidad y a la formalización, en la cual el conjunto de las matemáticas no podría fundamentarse enteramente sobre procedimientos decidibles.

De esta manera, lo que enseña esta lógica y su sintaxis es “la delimitación del campo de lo que se puede formalizar y de lo que no se puede formalizar”, sacando a la luz la existencia de una matemática aceptada como formalizada, pero también la importancia de certezas lógicas inductivamente adquiridas pero que ha sido imposible de transformar en teoremas y de formalizar completamente (Tesis Turing-Church); mostrando en los dos casos, la complejidad de los desarrollos introducidos por la formalización de la sintaxis y la riqueza de una ciencia lógica muy viva.

Igualmente, estos desarrollos de formalización ampliaron, de alguna forma la imaginación abstracta de los lógicos, matemáticos y filósofos, produciendo herramientas e hipótesis innumerables, aplicables al análisis de casi cualquier hecho complejo, mostrando el género de problemas susceptibles de recibir una solución o aquellos que deben ser dejados porque van más allá de cualquier solución.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

BLANCHÉ, Robert – DUBUCS, Jacques. «La Logique et son Histoire». Paris, Armand Colin, 1996.

BLOOMFIELD, LEONARD. “Linguistic aspects of Science”. CHICAGO, Illinois, The University of Chicago Press, 1939; 3th. ed. 1946. En: International Encyclopedia of Unified Science. Vol. I. Number 4. p. 1-57.

33 “Sur les propositions formellement indécidables des *Principia Mathematica* et des systèmes apparentés I” 1931.

- CARNAP, Rudolf. "Formalization of logic". Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1943. 159 p.
- \_\_\_\_\_. "Introduction to Semantics". Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1948. 252 p.
- \_\_\_\_\_. "Logical syntax of language". First published, Kegan Paul, Trench, Trubner & Co. Ltd. Reprinted 2000, Routledge, London. Reprinted 2001, Routledge, London.
- \_\_\_\_\_. "Foundations of logic and mathematics". Chicago, University of Chicago Press, May 1939; 4<sup>th</sup>. ed. 1947. En: *International Encyclopedia of Unified Science*: vol. 1. Number 3. pp. 1-71.
- FREGE, G. «Idéographie». traduction, préface, notes et index par Corine Besson. Postface de J. Barnes. Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1999.
- HILBERT, David y BEERNAYS, P. «Fondements des Mathématiques 1», traduction de l'ouvrage «Grundlagen der Mathematik 1» (Springer), 2a. ed. 1968. Paris, Ed. l'Harmattan, 2002, 2 vols.
- HOTTOIS, Gilbert. «Penser la Logique ; une introduction technique et théorique a la philosophie de la logique et du langage», 2eme, ed. Bruxelles, De Boeck Université, 2002.
- GÖDEL, Kurt. «Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés I». 1931. Dans «NAGEL, E.-NEWMAN, J. R.- GODEL, K.- GIRARD, J. I. Le Théorème de Gödel». Paris, Ed. Seuil, 1989.
- LARGEAULT, Jean. «La logiqu». Paris, PUF, 1993.
- KLEENE, Stephen C. "Logique Mathématique". Traduction de Jean Largeault. Paris, Librairie Armand Colin, 1971.
- LEPAGE, François. "Eléments de Logique Contemporaine". Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal.
- MARTIN, Roger. «Logique contemporaine et formalisation». Paris, PUF, 1964.
- MORRIS, Charles: "Foundations of the Theory of Signs". CHICAGO, Illinois, The University of Chicago Press, 1938. En: *International Encyclopedia of Unified Science*. Vol. I. Number 2. p. 1-59.
- NEURATH, Otto; BOHR, Niels; DEWEY, John; RUSSELL, Bertrand, CARNAP, Rudolf, MORRIS, Charles W. "Encyclopedia and Unified Science". CHICAGO, Illinois, The University of Chicago Press, 1938; En: *International Encyclopedia of Unified Science*. Vol. I. Number 1. p. 1-75.

- PRADILLA RUEDA, Magdalena. "Vers une Epistémologie de la Théorie Informatique". Paris, Université Paris 1-Panthéon Sorbonne, 2008. Thèse Docteur en Philosophie.
- QUINE, Willard van Orman. *Word & Object*, MIT Press, 1960; Traducción francesa: *Le Mot et la Chose*, par Dopp y Gochet; Paris, Flammarion, 1977.
- ROUILHAN, Philippe de. "Frege: les Paradoxes de la Représentation". Paris, Editions de Minuit, 1988.
- SCHOLZ, Heinrich. "Esquisse d'une Histoire de la Logique". Paris, Ed. Aubier-Montaigne, 1968.
- WHITEHEAD, Alfred North, y Bertrand RUSSELL. *Principia Mathematica*. 3 vols. Cambridge, University Press, 1910-1913. 2a. ed. 1925-1927.
- WITTGENSTEIN, Ludwig. «Tractatus Logico-Philosophicus», trad. de G.G. Granger, Gallimard, 1993. «Tractatus Logico-Philosophicus, suivi de Investigations Philosophiques», trad. de l'allemand par Pierre Klossowski. Paris, Gallimard, 1961.

# TEOREMA DE LA DIVISIÓN DE LEMNISCATA

LEONARDO SOLANILLA\*, ÓSCAR PALACIO\*\*, URIEL HERNÁNDEZ\*\*\*

Recibido: 25 de junio de 2013 / Aceptado: 30 de agosto de 2013

## RESUMEN

En este artículo demostramos el Teorema de Abel para la lemniscata sin la ayuda de la teoría de las Funciones Elípticas y sin referencia alguna a la moderna Teoría de Campos. Los ingredientes esenciales de la demostración son las funciones lemniscáticas de Gauss y algunas nociones elementales sobre factorización en el anillo de los polinomios que tienen coeficientes racionales. El procedimiento es muy poderoso. En verdad, no solo probamos que la construcción geométrica es posible, sino que indicamos las operaciones algebraicas que realizan la construcción.

**Palabras y frases clave:** división de la lemniscata, funciones elípticas, construcciones geométricas, Teorema de Abel, Teoría de Galois.

## ABSTRACT

Here we prove Abel's Theorem on the lemniscate from scratch. This means no reference to Elliptic Functions or Field Theory is made. Instead, we use of the elementary theory of the lemniscatic sine and some basic facts on the factorization in  $\mathbb{Q}[x]$ . The procedure is powerful. We do not only prove the validity of the geometric construction but also give an algebraic algorithm yielding the constructible numbers.

**Keywords and phrases:** Lemniscate splitting, elliptic functions, geometric constructions, Abel's Theorem on the Lemniscate, Galois Theory.

## 1. INTRODUCCIÓN

La lemniscata es la curva plana dada por la ecuación cartesiana

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2).$$

En este artículo demostramos el célebre Teorema de Abel para la lemniscata:

---

\* Doctor en Matemáticas. Profesor, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. Correo electrónico: leonsolc@ut.edu.co

\*\* Especialista en Matemáticas Avanzadas. Profesor, Universidad Cooperativa de Colombia, Ibagué, Colombia. Correo electrónico:ojpalacio86@gmail.com

\*\*\* Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística. Ibagué, Colombia. Correo electrónico: uriel501@hotmail.com

**Teorema 1.1** (Abel). Si  $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_t$ , donde los  $p_i, i = 1, \dots, t$ , son primos de Fermat diferentes, entonces es posible dividir la lemniscata en  $n$  partes iguales con regla y compás.

Es inevitable comparar este resultado con el de Gauss (1801) sobre la construcción de los polígonos regulares.

Aún cuando en las demostraciones seguimos el espíritu del texto original de Abel (1827), no usamos la teoría general de las Funciones Elípticas para probar este notable resultado. En su lugar, empleamos la teoría particular de las funciones lemniscáticas de Gauss. En ello, este artículo difiere del mencionado trabajo de Abel y de la conocida versión contemporánea de Rosen (1981). La historia completa del problema desde sus albores a comienzos del siglo XVIII se puede consultar en Hernández y Palacio (2009).

En la Sección 2 presentamos los rudimentos indispensables sobre el seno y coseno lemniscáticos de Gauss. Con ayuda de la fórmula de adición del seno lemniscático para el arco doble, se prueba la primera proposición fundamental, a saber:

**Teorema 1.2.** La lemniscata se puede dividir en  $2^k, k \in \mathbb{Z}^+$ , partes iguales con regla y compás.

El resto del asunto es más delicado. En la Sección 3, estudiamos la forma racional de la fórmula de adición del seno lemniscático para un múltiplo impar de un arco dado. El análisis de la situación nos permite construir un polinomio cuyas raíces resuelven el problema de la división. La Sección 4 está dedicada al caso particular en el que el entero positivo impar es un primo de Fermat. En ella se prueba lo siguiente.

**Teorema 1.3.** Si  $n$  es un primo de Fermat, la lemniscata se puede dividir en  $n$  partes iguales con regla y compás.

Finalmente, un breve argumento que combina las fórmulas de adición con la Teoría de Números permite demostrar el Teorema 1.1. A manera de conclusión, se bosquejan algunas reflexiones y comentarios sobre el papel de este teorema en la historia del problema de la división de la lemniscata en partes iguales.

## 2. FUNCIONES LEMNISCÁTICAS

En su diario matemático, Gauss (1797) anotó los resultados de su estudio sobre estas funciones. En seguida presentamos un breve resumen de su teoría, el cual sirve de fundamento a nuestra presentación.

## 2.1. Seno lemniscático de Gauss. El número

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} \approx 1,3110287714605987$$

juega el papel de  $\pi/2$  en la teoría de las funciones circulares. Consideremos, pues,

$$\operatorname{arcsl} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right], \quad x \longmapsto \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}}.$$

La integral de la derecha es la longitud de arco de la lemniscata. Como  $\operatorname{arcsl}$  es biyectiva, definimos el seno lemniscático como la función impar de periodo  $2\varpi$  que satisface  $\operatorname{sl} = \operatorname{arcsl}^{-1}$  en el intervalo  $[-\frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}]$ . O sea,  $\operatorname{sl} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  y su gráfica es similar a la del seno circular.

El seno lemniscático es diferenciable. Más aún, el teorema de inversión (o de la función inversa) del Cálculo elemental arroja  $(d\operatorname{sl}/dx)(a) = \pm (1 - \operatorname{sl}^4(a))^{1/2}$ . El coseno lemniscático es la función:

$$\operatorname{cl} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \operatorname{cl}(x) = \operatorname{sl}\left(\frac{\varpi}{2} - x\right).$$

La identidad pitagórica de la Trigonometría circular tiene su contraparte lemniscática en la identidad fundamental

$$\operatorname{sl}^2(x) + \operatorname{cl}^2(x) + \operatorname{sl}^2(x)\operatorname{cl}^2(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sl}^2(x) = \frac{1 - \operatorname{cl}^2(x)}{1 + \operatorname{cl}^2(x)}.$$

La constructibilidad de un punto de la lemniscata equivale a construir el seno y el coseno lemniscático correspondiente a su arco. Así que, desde el punto de vista de las construcciones geométricas, basta obtener una de las dos funciones lemniscáticas puesto que la otra se obtiene de aquella por operaciones de campo y raíces cuadradas.

También, la fórmula de adición del seno lemniscático es

$$\operatorname{sl}(x \pm y) = \frac{\operatorname{sl}(x)\operatorname{cl}(y) \pm \operatorname{sl}(y)\operatorname{cl}(x)}{1 \mp \operatorname{sl}(x)\operatorname{sl}(y)\operatorname{cl}(x)\operatorname{cl}(y)}.$$

**2.2. Bisecciones iteradas de la lemniscata.** Así pues, la fórmula del seno lemiscático del arco doble es  $\text{sl}(2x) = \frac{2\text{sl}(x)\text{cl}(x)}{1-\text{sl}^2(x)\text{cl}^2(x)}$ . Ella nos conduce a un primer resultado sobre la construcción de las divisiones de la lemniscata.

**Proposición 2.1.** *Si  $\text{sl}(x)$  es construible con regla y compás, entonces  $\text{sl}\left(\frac{x}{2}\right)$  también lo es.*

*Demostración.* En

$$\text{sl}(x) = \frac{2\text{sl}\left(\frac{x}{2}\right)\text{cl}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\text{sl}^2\left(\frac{x}{2}\right)\text{cl}^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ponemos  $y = \text{sl}\left(\frac{x}{2}\right)\text{cl}\left(\frac{x}{2}\right)$  para obtener  $\text{sl}(x) = \frac{2y}{1-y^2}$ . De este modo,  $\text{sl}(x) - y^2\text{sl}(x) - 2y = 0$  y la fórmula cuadrática arroja que

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \text{sl}^2(x)}}{\text{sl}(x)}$$

es contruible con regla y compás. Ahora bien, la identidad fundamental produce

$$y = \pm \text{sl}\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{\frac{1 - \text{sl}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \text{sl}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

En consecuencia,

$$\text{sl}^4\left(\frac{x}{2}\right) - (1 - y^2)\text{sl}^2\left(\frac{x}{2}\right) + y^2 = 0.$$

De nuevo, por la forma de la solución a la ecuación cuadrática,  $\text{sl}^2(x/2)$  y  $\text{sl}(x/2)$  son construibles con regla y compás.

Repitiendo el proceso un número finito de veces a partir de la totalidad de la curva, obtenemos el Teorema 1.2.

### 3. ESTRUCTURA DE $\text{sl}(Nx)$ , $N$ IMPAR

Es fácil probar que

$$\operatorname{sl}(3x) = \operatorname{sl}(2x + x) = \operatorname{sl}(x) \times \frac{3 - 6\operatorname{sl}^4(x) - \operatorname{sl}^8(x)}{1 + 6\operatorname{sl}^4(x) - 3\operatorname{sl}^8(x)}.$$

En general, este hecho se generaliza con ayuda del principio de inducción y la fórmula de adición del seno lemniscático. Ciertamente, no es difícil probar que

**Proposición 3.1.** *Si  $n \in \mathbb{Z}^+$  es impar, entonces*

$$\operatorname{sl}(nx) = \operatorname{sl}(x) \times \psi(\operatorname{sl}^2(x)),$$

donde  $\psi$  es una función racional con coeficientes enteros.

Escribamos ahora

$$\psi(\operatorname{sl}^2(x)) = \frac{p(\operatorname{sl}(x))}{q(\operatorname{sl}(x))},$$

para ciertos polinomios  $p, q$  con coeficientes enteros que no tienen factores irreducibles comunes y por tanto, no tienen ceros comunes. Resulta que los ceros de  $p$  son precisamente aquellos que necesitamos para la división de la lemniscata en  $n$  (impar) partes.

**Proposición 3.2.** *Si  $n = 2k + 1 > 3$  es un entero impar,  $p$  es un polinomio de grado  $n - 1 = 2k$  con ceros distintos no repetidos*

$$\operatorname{sl}\left(\frac{m}{n}\varpi\right),$$

donde  $m$  toma los valores enteros distintos de cero entre  $-k$  y  $k$ . Con esto, quedan determinados los ceros distintos de cero de  $\operatorname{sl}(nx)$  en el intervalo  $[-\varpi/2, \varpi/2]$ .

*Demostración.* Si  $x = \varpi/n$ , entonces  $\operatorname{sl}(nx) = \operatorname{sl}(\varpi) = 0$  y así,  $\operatorname{sl}(\varpi/n)$  es un cero distinto de cero de  $p$ . Con el fin de encontrar todos los ceros de  $p$ , observemos que si  $p(\operatorname{sl}(x)) = 0$ ,  $\operatorname{sl}(nx) = 0$ . Por tanto, la periodicidad del seno implica que  $nx = m\varpi$  y, de este modo,  $x = \frac{m}{n}\varpi, m \in \mathbb{Z}$ . Afirmamos que los ceros de  $p$  en  $[-\varpi/2, \varpi/2]$  son

$$\operatorname{sl}\left(\frac{m}{n}\varpi\right), m \in [-k, k] - \{0\}.$$

Veamos que todos ellos son distintos. Ciertamente, si  $\text{sl}(m\varpi/n) = \text{sl}(m'\varpi/n)$ , entonces  $(m-m')\varpi = 2\varpi jn$ , para cierto entero  $j$ . Se sigue que

$$\frac{m - m'}{2n} = j,$$

lo cual es contradictorio con el rango de valores posibles de  $m, m'$ . De este modo,  $p$  tiene  $n - 1$  ceros diferentes. Hace falta ver que dichos ceros no están repetidos. Al derivar  $\text{sl}(nx)q(\text{sl}(x)) = \text{sl}(x)p(\text{sl}(x))$  con respecto a  $y = \text{sl}(x)$ ,

$$\frac{d}{dy}\text{sl}(nx) \times q(\text{sl}(x)) + \text{sl}(nx)\frac{dq}{dy} = p(\text{sl}(x)) + \text{sl}(x)\frac{dp}{dy}.$$

Si suponemos que  $p$  tiene un cero repetido  $\text{sl}(x)$ , su derivada también se anula en dicho cero y la expresión anterior produce  $q(\text{sl}(x)) = 0$ . Esto no es posible porque hemos supuesto que  $p$  y  $q$  no tienen ceros comunes.

**Corolario 3.1.** *La sustitución  $r = \text{sl}^2(x)$  en  $p$  produce un polinomio con coeficientes enteros de grado  $k = \frac{n-1}{2}$  en  $r$  cuyos ceros distintos y no repetidos son*

$$\text{sl}^2\left(\frac{m}{n}\varpi\right) \in [0, \varpi/2], \quad 1 \leq m \leq k.$$

#### 4. PRIMOS DE FERMAT

Limitémonos al caso en que  $n$  es un primo de la forma  $2^{2u} + 1$ , o sea, un primo de Fermat. Partimos, pues, del polinomio

$$c_0 + c_1r + \cdots + c_k r^k, \quad c_0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{Z},$$

$k = (n - 1)/2 = 2^{2u} - 1$ , cuyos ceros son

$$\text{sl}^2\left(m\frac{\varpi}{n}\right), \quad 1 \leq m \leq 2^{2u} - 1.$$

Denotemos por  $\alpha$  a una raíz primitiva módulo  $n$ , es decir,  $\alpha$  es un elemento del campo  $\mathbb{Z}_n$  tal que  $n$  es el menor entero no negativo que produce  $\alpha^{n-1} = 1$  (en  $\mathbb{Z}_n$ ). Ahora bien, el grupo de unidades

$$\{1, 2, \dots, k, \dots, n - 1 = -1\} = \{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^k = -1, \dots, \alpha^{n-1} = 1\}$$

contiene el subgrupo  $\{1, -1\}$  y el cociente está formado por las clases

$$|m| = \{m, -m\}, 1 \leq m \leq k.$$

De este modo,  $|\alpha^{k+m}| = |\alpha^m|$ . Todo se reduce a considerar la construcción geométrica de los elementos permutados

$$\text{sl}^2\left(|\alpha^m| \frac{\overline{\omega}}{n}\right), 0 \leq m \leq k-1 = 2^{2^u-1} - 1.$$

Construyamos enseguida

$$\psi_\theta\left(\frac{\overline{\omega}}{n}\right) = \sum_{m=0}^{k-1} \theta^m \text{sl}^2\left(|\alpha^m| \frac{\overline{\omega}}{n}\right),$$

donde  $\theta \in \mathbb{C}$  es una raíz  $k$ -ésima cualquiera de la unidad, es decir,  $\theta^k = 1$ .

Notemos que  $\psi$  es una función racional de  $\text{sl}^2\left(\frac{\overline{\omega}}{n}\right)$ , digamos,

$$\psi_\theta\left(\frac{\overline{\omega}}{n}\right) = \chi_\theta\left(\text{sl}^2\left(\frac{\overline{\omega}}{n}\right)\right).$$

Para  $\mu \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,

$$\begin{aligned} \psi_\theta\left(|\alpha^\mu| \frac{\overline{\omega}}{n}\right) &= \sum_{m=0}^{k-1} \theta^m \text{sl}^2\left(|\alpha^{m+\mu}| \frac{\overline{\omega}}{n}\right) \\ &= \theta^{-\mu} \sum_{m=0}^{k-1} \theta^{m+\mu} \text{sl}^2\left(|\alpha^{m+\mu}| \frac{\overline{\omega}}{n}\right) = \theta^{-\mu} \psi_\theta\left(\frac{\overline{\omega}}{n}\right). \end{aligned}$$

Entonces, elevando a la  $k$ ,

$$\psi_\theta\left(\frac{\overline{\omega}}{n}\right)^k = \chi_\theta\left(\text{sl}^2\left(|\alpha^\mu| \frac{\overline{\omega}}{n}\right)\right)^k.$$

Sumando para los valores posibles de  $\mu$ ,

$$v_\theta := \psi_\theta\left(\frac{\overline{\omega}}{n}\right)^k = \frac{1}{k} \sum_{\mu=0}^{k-1} \chi_\theta\left(\text{sl}^2\left(|\alpha^\mu| \frac{\overline{\omega}}{n}\right)\right)^k.$$

Esta expresión es una función racional y simétrica de los ceros del polinomio; así, se puede reescribir a partir de sus coeficientes  $c_0, c_1, \dots, c_m$

mediante operaciones de campo. Como  $k = 2^{2^u - 1}$ ,  $\psi_\theta(\varpi/n) = \sqrt[k]{v_\theta}$  se obtiene a partir de  $v_\theta$  mediante raíces cuadradas sucesivas. En breve,  $\psi_\theta(\varpi/n)$  es construible.

Si  $\theta = \cos(\frac{2\pi}{k}) + i \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{k})$ , las raíces  $k$ -ésimas de la unidad son  $\theta^m$ ,  $m = 0, 1, \dots, k-1$ . Por la forma de  $k$ , todas ellas son construibles con regla y compás en virtud del teorema de Gauss sobre la construcción de los polígonos regulares. Si permitimos que  $\theta$  tome sus  $k$  valores posibles, se obtiene el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \psi_1\left(\frac{\varpi}{n}\right) \\ \psi_\theta\left(\frac{\varpi}{n}\right) \\ \psi_{\theta^2}\left(\frac{\varpi}{n}\right) \\ \vdots \\ \psi_{\theta^{k-1}}\left(\frac{\varpi}{n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \theta & \theta^2 & \dots & \theta^{-1} \\ 1 & \theta^2 & \theta^4 & \dots & \theta^{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \theta^{-1} & \theta^{-2} & \dots & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sl}^2\left(\frac{\varpi}{n}\right) \\ \operatorname{sl}^2\left(|\alpha|\frac{\varpi}{n}\right) \\ \operatorname{sl}^2\left(|\alpha^2|\frac{\varpi}{n}\right) \\ \vdots \\ \operatorname{sl}^2\left(|\alpha^{k-1}|\frac{\varpi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

En particular, la primera ecuación de este sistema, correspondiente a  $\theta = 1$ , produce la suma de las raíces

$$\psi_1\left(\frac{\varpi}{n}\right) = -c_{m-1} = \sum_{m=0}^{k-1} \operatorname{sl}^2\left(|\alpha^m|\frac{\varpi}{n}\right).$$

Por fortuna, la matriz del sistema no es singular. Es más, su inversa es

$$\frac{1}{k} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \theta^{-1} & \theta^{-2} & \dots & \theta \\ 1 & \theta^{-2} & \theta^{-4} & \dots & \theta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \theta & \theta^2 & \dots & \theta^{-1} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, las raíces de nuestro polinomio  $p$  son construibles. Esto demuestra el Teorema 1.3.

Supongamos para terminar que  $n_1$  es una potencia de dos o un primo de Fermat y que  $n_2$  es un primo de Fermat, distinto a  $n_1$  en el caso de que este lo sea. Por lo anterior junto con la fórmula de adición, los números

$$\operatorname{sl}\left(k_1 \frac{\varpi}{n_1}\right) \text{ y } \operatorname{sl}\left(k_2 \frac{\varpi}{n_2}\right)$$

son construibles para enteros cualesquiera  $k_1, k_2$ . Luego, por la fórmula de adición (de nuevo)

$$\operatorname{sl}\left(k_1 \frac{\varpi}{n_1} + k_2 \frac{\varpi}{n_2}\right) = \operatorname{sl}\left(\frac{k_1 n_2 + k_2 n_1}{n_1 n_2} \varpi\right)$$

también es construible. Ya que  $n_1$  y  $n_2$  son primos relativos, existen enteros  $k_1, k_2$  tales que  $k_1 n_2 + k_2 n_1 = 1$ . Repitiendo este argumento las veces que sea necesario, se logra la demostración del Teorema 1.1.

## 5. A MODO DE CONCLUSIÓN

El Teorema de Abel señala el momento histórico de solución del problema de dividir la lemniscata en partes iguales con regla y compás. El problema había tenido un inicio prometedor a comienzos del siglo XVIII. Sin embargo, el método analítico usado para la división en dos, tres y cinco partes se hacía muy difícil para enteros mayores. Siguiendo las enseñanzas de Gauss, Abel pudo resolver el problema por un método que, hoy por hoy, puede considerarse algebraico. El resultado también tiende un puente entre el pasado y el futuro del problema. Entre otros detalles interesantes, señalemos aquí que los polinomios palindrómicos, que los grandes analistas del siglo XVIII encontraban al dividir la curva, se explican con gran claridad en el marco del estudio abeliano de  $\operatorname{sl}(nx)$ , tal como se trata más arriba. De otro lado, Abel también sentó las bases sólidas que llevaron después a probar el recíproco de su teorema, un resultado interesantísimo que queda fuera del alcance de este artículo introductorio.

## BIBLIOGRAFÍA

1. ABEL, N. H. Recherches sur les fonctions elliptiques. Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgeben von Crelle, Bd. 2, 3, Berlin, 1827-1828. Reimpreso en *Œuvres complètes* (1992), Tome 1, deuxième édition, Sceaux, Éditions Jacques Gabay: 263-388. Reimpresión autorizada de *Œuvres complètes* de Niels Hendrik Abel (1881), por Ludwig Sylow y Sophus Lie, Grøndahl & Søn, Christiania (Noruega), 1827.
2. GAUSS, C. F. *Lemniscatische Functionen II. dargestellt durch unendliche Producte un durch trigonometrische Reihen (De curva lemniscata)*. Aparecido en *Werke* (1866), Dritter Band, Herausgeben von der Königlische Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen: 413-432, 1797.
3. GAUSS, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae*. Lipsiae, In commissis apud Gerh. Fleischer. Reimpreso en *Werke* (1863), erster Band, Göttingen, Herausgeben von

der Königlische Gesellschaft für Wissenschaften. Traducción inglesa (1986) de CLARKE, A. A., New York, Springer Verlag. Traducción española (1995) de BARRANTES, H., JOSEPHY, M. y RUIZ, A. Bogotá, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1801.

4. HERNÁNDEZ, U. y PALACIO, Oscar J. *División de la lemniscata: geometría, análisis, álgebra*. Ibagué, Colombia. Trabajo de Grado, Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, 2009.
5. ROSEN, M. Abel's Theorem on the Lemniscate. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 88, Jun.-Jul., No. 6: 387-395, 1981.



