



<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MODELO MATEMÁTICO DE INTEGRACIÓN DE PRODUCCIÓN E INVENTARIOS EN UNA RED LOGÍSTICA PLANTAS, DISTRIBUIDORES Y DETALLISTAS

Mathematical model of integration of production and inventories in a logistics network plants, distributors and retailers

CÉSAR AUGUSTO PINEDA PÉREZ¹

Recibido: 20 de diciembre de 2021. Aceptado: 13 de marzo de 2022

DOI: <http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2022.v9.n18.a122>

Resumen

Este artículo presenta un modelo matemático de programación no lineal que coordina los inventarios y la producción en una red logística conformada por plantas, distribuidores y detallistas. El procedimiento para formular y resolver el modelo matemático utiliza programación no lineal, programación lineal, heurísticas y relajación lagrangiana por etapas.

Palabras clave: Red Logística; Producción; Inventarios; Programación lineal y no lineal; Heurísticas; Relajación lagrangiana.

Abstract

This article presents a nonlinear programming mathematical model that coordinates inventories and production in a logistics network made up of plants, distributors, and retailers. The procedure for formulating and solving the mathematical model uses nonlinear programming, linear programming, heuristics, and Lagrangian relaxation in stages.

Keywords: Logistics Network; Production; Inventories; Linear and nonlinear programming; heuristics; Lagrangian relaxation.

I. INTRODUCCIÓN

DENTRO DE la literatura de las organizaciones industriales y de servicios, el término “Logística” ha tomado el papel relevante en la cadena de suministro. Se asocia el término logística a muchas funciones o actividades como la logística empresarial, la logística de distribución, la logística de distribución industrial, la logística del transporte, la logística de la gestión de inventarios, la logística

de materiales y distribución física y la logística de las redes de abastecimiento y de suministro[1]. La logística se entiende como la gestión de inventarios, el transporte, almacenamiento, distribución y manejo de materiales en la cadena de suministro[2]. Además, la logística forma parte del proceso de la gestión de la cadena de suministro, la cual controla el flujo y almacenamiento de los bienes y servicios, así como el manejo del flujo de información a través de la red logística[3].

¹ Magister en Ingeniería Industrial, Especialista en Ingeniería de Producción e Ingeniero Industrial de la Universidad Distrital. Docente investigador del grupo O.C.A de la Corporación universitaria republicana. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2161-5034> Correo electrónico: cesarpinedaperez@yahoo.es.

Al referirnos al concepto de cadena de suministro, son varios investigadores que emiten sus definiciones particulares. La cadena de suministro o red logística es un conjunto de organizaciones que están conformadas por proveedores, fabricantes, distribuidores, mayoristas, minoristas, centros de consumo, puntos de venta, que pretenden coordinarse de manera eficiente utilizando diversas técnicas de integración, con el objeto de obtener un mayor rendimiento de la cadena de suministro[4]. Otros autores, enuncian que una cadena de suministro está conformada incluso por todos aquellos actores que estén involucrados de manera directa o indirecta en la satisfacción de un cliente[5]. La cadena de suministro como una red de instalaciones que ejecutan una serie de actividades que inician desde la compra de la materia prima, el proceso de transformación o elaboración de productos intermedios y terminados, y finalmente el almacenamiento, distribución y transporte de estos bienes[6].

II. CONTEXTUALIZACIÓN DEL MODELO DE INTEGRACIÓN DE PRODUCCIÓN, TRANSPORTE E INVENTARIOS EN LA RED LOGÍSTICA

La integración en la red logística ha sido abordada ampliamente por relativamente pocos investigadores. Muchos esfuerzos se están haciendo para integrar las decisiones entre la producción y los sistemas de distribución bajo el enfoque de administración de la cadena de suministro (SCM)[4][5]. Decisiones integradas en Producción y Transporte, Producción e inventario; así como también Transporte e Inventario son formulados en los niveles estratégicos, tácticos y operacionales de la cadena de suministro[6]. Todos esos temas incluyen el costo total de producción, transporte e inventario[7].

En el escenario de la manufactura global, las decisiones en la cadena de suministro no se pueden tomar por separado [8]. Hoy en día las decisiones en la cadena de suministro tienen que ver con los procesos de integración dentro y fuera de la empresa[9]. Con el avance de la tecnología de la información, la manufactura global está dentro del alcance de muchas organizaciones pequeñas que entraran a engrosar la alta competencia de mercado[10]. En el ambiente de la

manufactura global, los costos logísticos dominan los gastos de las empresas manufactureras[11]. Por lo tanto, las decisiones logísticas involucran la obtención de la materia prima, producción y distribución y estas decisiones no se deben hacer por separado sino integrarlas con el fin de obtener beneficios. Para maximizar los ahorros en la manufactura global, los investigadores propusieron la integración de las decisiones logísticas de una red producción-distribución dentro de un ambiente de manufactura global. Así, una empresa de manufactura global puede ser formulado como una combinación red producción-distribución constituida de múltiples fuentes y múltiples destinos.

En recientes estudios, los modelos para coordinar redes de sistemas de producción-distribución han tendido a focalizar la integración de decisiones en programación de transporte, políticas y control de inventarios y programación de tamaños de lotes de producción[12]. En la cadena de suministro, el hecho de no integrar las decisiones en la red logística conlleva a la generación de altos costos de producción, transporte e inventario[13]. Los problemas típicos de una cadena de suministro no integrada generan: pronósticos poco precisos, entregas atrasadas, errores de envío, errores en la recepción, errores de facturación, agotamientos frecuentes, niveles de inventario elevados, costos de transporte elevados, costos de fabricación elevados, etc.[14]. Las necesidades de integración en la cadena de suministro surgen de los problemas que se presentan en las redes logísticas no integradas. Estas necesidades pueden presentarse desde diferentes perspectivas: integración de los mercados, integración entre varios sitios de fabricación, integración entre proveedores y fabricantes y distribuidores, integración del diseño y la fabricación, integración de múltiples proveedores de hardware y software[15]. Mediante la integración de la toma de decisiones en la red logística, los socios o actores de la cadena de suministro pueden desarrollar planes conjuntos para sincronizar la producción con el envío y los plazos de entrega, reducir costos, existencias de seguridad, control de inventarios, rotación de inventarios y consecuentemente mejorar el rendimiento operacional de la cadena de suministro, obteniéndose mayor flexibilidad, fiabilidad, calidad y productividad en la red logística[15].

Hoy en día, con el avance de la tecnología de la información, la manufactura global está dentro del alcance de las organizaciones pequeñas, por lo tanto, estas organizaciones quieranlo o no están inmersas en el campo de la competencia de mercado y de operar las redes logísticas a un menor costo. Las razones de administrar y operar las redes logísticas al menor costo posible, para tratar de mantenerse y ser competitivos en los mercados globalizados altamente competitivos, obliga a las organizaciones (pequeñas, medianas y grandes) a implementar técnicas, métodos, recursos que apoyen las decisiones logísticas integradas en cuanto a solucionar el problema de la asignación de producción, el problema del tamaño del lote económico, el problema de transporte y la cantidad ordenada al menor costo posible. Los componentes de costo incluyen el costo de producción, almacenamiento, alistamiento de las fuentes premisas (plantas de producción) y el costo de transporte, costos de ordenar e inventario de los puntos de destino[16]. Obtener la integración de las decisiones en la red logística para minimizar los costos de operatividad es un fin justificable[17].

De acuerdo con lo anterior, se estructura y formula un modelo de integración de toma de decisiones. Estas decisiones, en particular pretenden determinar el tamaño del lote de producción de las plantas, el número de unidades enviadas anualmente y la cantidad de ordenes entregadas por vez desde las plantas hacia los distribuidores y desde los distribuidores hacia los detallistas, pero también la asignación anual de cantidades de producción única de las plantas acorde al total demandado y a su capacidad de producción. La integración de los problemas de decisión logística conduce a determinar simultáneamente la asignación anual de cantidad de producción y tamaño de lote de las plantas de producción, cantidad de envíos anuales y la cantidad a ordenar de varios destinos a varias fuentes, para satisfacer la demanda a un costo mínimo total en un sistema de producción-distribución-detallista. En particular, las funciones objetivo de los modelos matemáticos propuestos son de tipo no lineal, por lo que se requiere aplicar procedimientos heurísticos para solucionar el problema de optimización no lineal. La siguiente figura ilustra la estructura del modelo que integra las decisiones en la red logística está compuesta por plantas, distribuidores y detallistas.

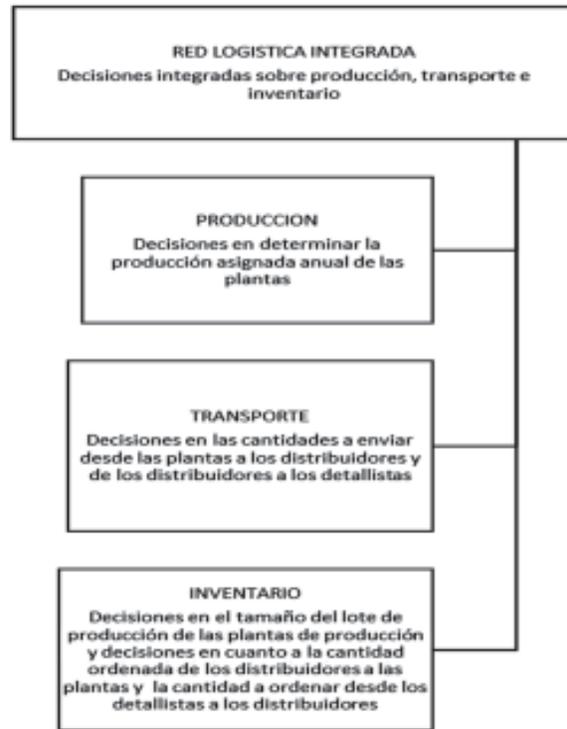


Fig. 1. Red logística Integrada.

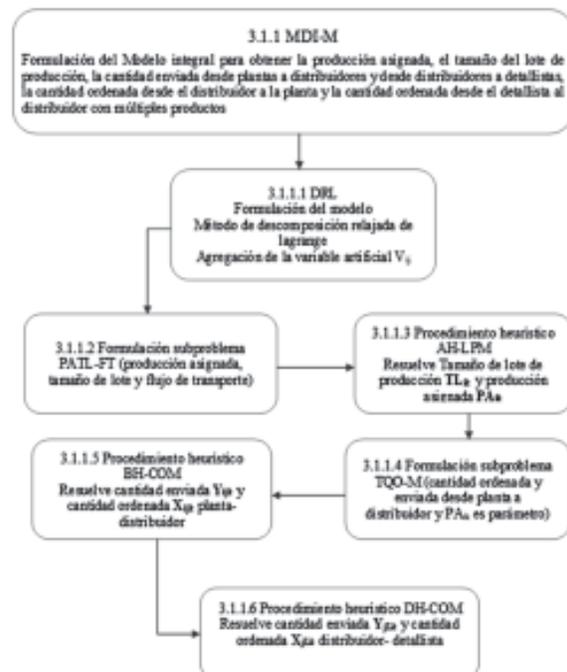


Fig. 2. Procedimiento para resolver el MDI-M.

III. MODELAMIENTO MATEMÁTICO MDI-M

La formulación del modelo matemático MDI-M (modelo de decisiones integradas para múltiples productos), es el siguiente:

Índices

i tipo planta, $i = 1, 2, 3, \dots, m$

j tipo distribuidor, $j = 1, 2, 3, \dots, n$

l tipo detallista, $l = 1, 2, 3, \dots, o$

k tipo producto, $k = 1, 2, 3, \dots, p$

Parámetros plantas de producción:

CP_{ik} Costo de producción por unidad para el producto tipo k en la planta tipo i (\$/unidad).

CM_{ik} Costo de mantenimiento de inventario anual por unidad para el producto tipo k en la planta tipo i (\$/unidad).

TP_i Tasa de producción anual en la planta i (unidades).

SD_{ik} Standard de producción para elaborar un producto tipo k en la planta tipo i (Horas/unidad).

CA_{ik} Costo de alistamiento del producto tipo k en la planta tipo i (\$).

Q_i Capacidad de producción anual en la planta tipo i (Horas/año).

C_{ij} Costo de transporte de enviar una unidad de producto desde la planta tipo i al distribuidor tipo j (\$/unidad).

Parámetros distribuidores:

CO_{jk} Costo de ordenar el producto tipo k para el distribuidor tipo j (\$/pedido).

CD_{jk} Costo de unitario de mantenimiento de inventario anual para el producto tipo k en el distribuidor tipo j (\$/unidad).

DEM_{jk} Tasa de demanda anual del producto tipo k en el distribuidor tipo j (unidades).

QAD_j Capacidad de almacenamiento del distribuidor tipo j (unidades).

C_{jl} Costo de transporte de enviar una unidad de producto desde el distribuidor tipo j hacia el detallista tipo l (\$/unidad).

Parámetros detallistas

CO_{lk} Costo de ordenar el producto tipo k para el detallista tipo l (\$/pedido).

CD_{lk} Costo unitario de mantenimiento de inventario anual para el producto tipo k en el detallista tipo l (\$/unidad).

DEM_{lk} Tasa de demanda anual del producto tipo k en el detallista tipo l (unidades).

QAR_l Capacidad de almacenamiento del detallista tipo l (unidades).

Variables de decisión plantas:

TL_{ik} Define el tamaño del lote de producción del producto tipo k en la planta tipo i (unidades/lote).

PA_{ik} Define la producción asignada anual del producto tipo k en la planta tipo i (unidades/año).

Y_{ijk} Indica la cantidad transportada o el número de unidades enviadas anualmente del producto tipo k desde la planta tipo i hacia el distribuidor tipo j (unidades/año).

Q_i^H Variable de holgura que indica la capacidad no utilizada de producción en la planta tipo i (horas/año).

Q_i^E Variable de exceso que indica la falta de capacidad de producción en la planta tipo i (horas/año), o las horas/años adicionales a la capacidad de producción de la planta tipo i requeridas para cumplir con la demanda del distribuidor tipo j (horas/año).

Variables de decisión distribuidores

X_{ijk} Indica la cantidad ordenada de producto tipo k por año del distribuidor tipo j a la planta tipo i (unidades/año).

Y_{jlk} Indica la cantidad transportada o el número de unidades enviadas anualmente del producto tipo k desde el distribuidor tipo j hacia el detallista tipo l (unidades/año).

QAD_j^H Variable de holgura que indica la capacidad no utilizada de almacenamiento del distribuidor tipo j (unidades).

QAD_j^E Variable de exceso que indica la falta de capacidad de almacenamiento del distribuidor tipo j (unidades), o las unidades adicionales a la capacidad de almacenamiento del distribuidor tipo j requeridas para cumplir con la demanda del detallista tipo l (unidades).

Variables de decisión detallistas

X_{jlk} Indica la cantidad ordenada del producto tipo k por año del detallista tipo l al distribuidor tipo j (unidades/año).

QAD_l^H Variable de holgura que indica la capacidad no utilizada de almacenamiento del detallista tipo l (unidades).

QAD_l^E Variable de exceso que indica la falta de capacidad de almacenamiento del detallista tipo l (unidades), o las unidades adicionales a la capacidad de almacenamiento del detallista tipo l requeridas para almacenar el envío del distribuidor tipo j (unidades).

Se asume que múltiples productos son elaborados en las líneas de producción dada una tasa de producción en las plantas. Esto es, diferentes partes son producidas con la misma tasa de producción para una planta específica. Es decir:

$$TP_i = \max_k \left(\frac{Q_i}{SD_{ik}} \right) \tag{1}$$

La estructura de costos la integran el costo de producción, el costo de transporte y los costos combinados de inventario y de pedido, los cuales se representan en la ecuación (2), así:

Costos de las plantas

$$F_1(PA, TL, X) = \sum_i \sum_k \left\{ \begin{aligned} &CP_{ik}PA_{ik} + (CA_{ik}PA_{ik})/TL_{ik} + \\ &\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) \frac{CM_{ik}TL_{ik}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) CM_{ik} \sum_j X_{ijk} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Costos de envío hacia los distribuidores

$$F_2(Y) = \sum_i \sum_j \sum_k C_{ij} Y_{ijk} \tag{3}$$

Costos de envío hacia los detallistas

$$F_3(Y) = \sum_j \sum_l \sum_k C_{jl} Y_{jlk} \tag{4}$$

Costos de inventarios en los distribuidores

$$F_4(X, Y) = \sum_i \sum_j \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) \sum_k CD_{jk} X_{ijk} + \sum_k \left(\frac{CO_{jk} Y_{ijk}}{X_{ijk}} \right) \right\} \tag{5}$$

Costos de inventarios en los detallistas

$$F_5(X, Y) = \sum_j \sum_l \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) \sum_k CD_{lk} X_{jlk} + \sum_k \left(\frac{CO_{lk} Y_{jlk}}{X_{jlk}} \right) \right\} \tag{6}$$

Función objetivo

$$\text{Min } CT_1 = F_1(PA, TL, X) + F_2(Y) + F_3(Y) + F_4(X, Y) + F_5(X, Y) \tag{7}$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_l Y_{ljk} = DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre distribuidores y detallistas.

$$\sum_j Y_{jlk} = DEM_{lk}, \forall l = 1, 2, \dots, o, k = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y producción de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_j Y_{ijk} = PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

Restricción de balance de flujo de transporte de cada producto entre distribuidores y detallistas.

$$\sum_{ij} Y_{ijk} = \sum_{jl} Y_{jlk}, k = 1, 2, \dots, p \quad (11)$$

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j D_{jk}, k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik} SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción que asegura que el tamaño del lote de producción debe ser \leq que la producción asignada para cada producto.

$$0 \leq TL_{ik} \leq PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (14)$$

Restricción que garantiza que la cantidad ordenada por unidad de tiempo deber ser \leq que el número de unidades enviadas anualmente desde la planta i al distribuidor j .

$$0 \leq X_{ijk} \leq Y_{ijk}, \forall l, j, k \quad (15)$$

Restricción que garantiza que la cantidad ordenada por unidad de tiempo deber ser \leq que el número de unidades enviadas anualmente desde el distribuidor j al detallista l .

$$0 \leq X_{jlk} \leq Y_{jlk}, \forall j, l, k \quad (16)$$

Restricción de capacidad de almacenamiento de los distribuidores.

$$\sum_{ik} X_{ijk} + QAD_j^H - QAD_j^E = QAD_j, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

Restricción de capacidad de almacenamiento de los detallistas.

$$\sum_{jk} X_{jlk} + QAR_l^H - QAR_l^E = QAR_l, \forall l = 1, 2, \dots, o \quad (18)$$

Este modelo matemático no puede ser resuelto directamente por las técnicas convencionales de programación no lineal, donde únicamente la solución óptima local puede ser encontrada, debido a que la computación es mucho más compleja y difícil cuando se incrementa el número de plantas, el número de distribuidores, el número de detallistas y el número de tipos de productos. Para resolver este modelo se requiere utilizar un método de descomposición el cual se ilustra en la Fig. 2. El modelo MDI-M indica que es un modelo que contempla múltiples productos, varias plantas, varios distribuidores y varios detallistas.

A. DRL-Formulación del modelo con el método de descomposición relajada de Lagrange

El método de descomposición basada en la relajación lagrangiana con heurísticas es introducido para resolver el modelo MDI-M. Particularmente en la relación planta - distribuidor. Sea V_{ij} una variable artificial indicando el flujo anual de transporte entre la planta i y el distribuidor j . Introduciendo una ecuación adicional:

$$\sum_k Y_{ijk} = V_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m; \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

El modelo matemático MDI-M, incluyendo la restricción (19), es reformulado así:

$$\text{Minimizar } CT_2 = \sum_{ik} \left\{ CP_{ik} PA_{ik} + \frac{CM_{ik} TL_{ik}}{2} \right\} + \sum_{ijk} \left\{ \frac{(CM_{ik} + CD_{jk}) X_{ijk}}{2} + C_{ij} Y_{ijk} + \frac{CO_{jk} Y_{ijk}}{X_{ijk}} \right\} \quad (20)$$

Sujeto a:

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j DEM_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik} SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción balance entre la capacidad de producción y flujo de transporte (desde las plantas hacia los distribuidores) para cada planta, es decir, es el balance entre la cantidad de producción y el flujo del transporte en cada planta.

$$\sum_k PA_{ik} = \sum_j V_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Restricción balance entre la demanda de productos y el flujo de transporte de cada distribuidor, es decir esta restricción, representa el balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$\sum_i V_{ij} = \sum_k DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Restricción balance entre el flujo de transporte y la cantidad transportada desde las plantas hacia los distribuidores. Esta restricción muestra el balance de relación entre flujo de transporte y la cantidad transportada (desde plantas hacia distribuidores).

$$\sum_k Y_{ijk} = V_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m; \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto (plantas-distribuidores).

$$\sum_i Y_{ijk} = DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n, \forall k = 1, 2, \dots, p \quad (23)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y producción de cada producto (plantas - distribuidores).

$$\sum_j Y_{ijk} = PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, \forall k = 1, 2, \dots, p \quad (24)$$

Restricción que límite que indica que el tamaño del lote de producción debe ser \leq que la producción asignada para cada producto.

$$0 \leq TL_{ik} \leq PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (25)$$

Restricción balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$0 \leq V_{ij} \leq \sum_k DEM_{jk}, \forall i, j \quad (26)$$

Restricción limite. Restricción que indica el límite superior del tamaño del lote y la producción anual, flujo de transporte, y cantidad de transporte y cantidad ordenada respectivamente.

$$0 \leq X_{ijk} \leq Y_{ijk} \leq \text{Minimo}(DEM_{jk}, PA_{ik}), \forall i, j, k \quad (27)$$

En el modelo expuesto (MDI-M), V_{ij} es una variable de decisión artificial, y la ecuación (19) $\sum_k Y_{ijk} = V_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m; \forall j = 1, 2, \dots, n$, provee un puente entre las decisiones en el área de producción y las decisiones en transporte y cantidad ordenada (relación plantas- distribuidores). Por lo tanto, el método de descomposición de relajación lagrangiana llega a ser un buen camino para resolver problemas de este tipo.

De acuerdo con lo anterior se requiere introducir multiplicadores de Lagrange denotados como δ_{ij} en la restricción (19)

El modelo MDI-M (Modelo de decisiones integradas múltiples productos entre plantas y distribuidores) puede ser descompuesto en dos subproblemas de decisión integradas en dos escenarios. El primer escenario es la decisión integrada de producción asignada, tamaño del lote y flujo de transporte (PATL-FT), mientras que el segundo escenario es la decisión integrada en planeación de transporte y cantidad ordenada (TQO-M) en el distribuidor dada la producción asignada. Ellos son presentados a continuación.

B. Formulación subproblema PATL-FT (subproblema de producción asignada, tamaño de lote y flujo de transporte)

El subproblema PATL-FT incluye el multiplicador Lagrange δ_{ij} en la función objetivo. El modelo matemático de programación no lineal quedaría así:

$$\text{Minimizar } CT_3 = \sum_{ik} \left\{ CP_{ik}PA_{ik} + \frac{CM_{ik}TL_{ik}}{2} \right\} + \sum_{ij} \delta_{ij}V_{ij} \quad (28)$$

$$\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) + \frac{CA_{ik}PA_{ik}}{TL_{ik}}$$

Sujeto a:

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j DEM_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik}SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción balance entre la capacidad de producción y flujo de transporte (desde las plantas hacia los distribuidores) para cada planta, es decir, es el balance entre la cantidad de producción y el flujo del transporte en cada planta.

$$\sum_k PA_{ik} = \sum_j V_{ij}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Restricción balance entre la demanda de productos y el flujo de transporte de cada distribuidor, es decir esta restricción, representa el balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$\sum_i V_{ij} = \sum_k DEM_{jk}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Restricción que limite que indica que el tamaño del lote de producción debe ser \leq que la producción asignada para cada producto.

$$0 \leq TL_{ik} \leq PA_{ik}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (25)$$

Restricción balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$0 \leq V_{ij} \leq \sum_k DEM_{jk}, \quad \forall i, j \quad (26)$$

El subproblema PATL-FT apunta a determinar simultáneamente la producción asignada anual (entre plantas) y flujos de transporte (entre plantas y distribuidores) y tamaños de lotes de producción a un costo mínimo total de producción y flujo de transporte.

Para encontrar la solución del modelo PATL-FT, este puede ser descompuesto en dos subproblemas. El primer subproblema es la asignación de la capacidad de producción entre los tipos de productos para cada planta y la asignación del flujo de transporte entre plantas y distribuidores. El segundo subproblema es determinar el tamaño del lote conocida la producción asignada para cada tipo de producto. Además, el PATL-FT tiene la particularidad de que la decisión del tamaño de lote depende únicamente de la producción asignada en un sistema cerrado y que en últimas el objetivo y las restricciones están en forma lineal. Por lo tanto, la heurística en dos pasos puede ser aplicada para resolver el PATL-FT. La idea básica es que la producción de un lote para cada par de productos y plantas es en principio calculado en forma cerrada resolviendo optimización local no restringida dada la producción anual asignada PA_{ik} . Los tamaños de los lotes de producción son entonces combi-

nados para determinar la asignación de producción y flujo de transporte resolviendo el problema de asignación. Para cada par de producto y planta, la producción individual del tamaño del lote puede ser calculado una vez se conozca PA_{ik} . Para obtener el tamaño del lote del producto tipo k en cada planta tipo i , se requiere derivar parcialmente la función $F_1(PA, TL, X)$ con respecto a la variable TL_{ik} , así:

$$F_1(PA, TL, X) = \sum_i \sum_k \left\{ \begin{aligned} &CP_{ik}PA_{ik} + (CA_{ik}PA_{ik})/TL_{ik} + \\ &\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) \frac{CM_{ik}TL_{ik}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) CM_{ik} \sum_j X_{ij} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial F_1(PA, TL, X)}{\partial TL_{ik}} = -\frac{CA_{ik}PA_{ik}}{TL_{ik}^2} + \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) \frac{CM_{ik}}{2} = 0$$

$$\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) \frac{CM_{ik}}{2} = \frac{CA_{ik}PA_{ik}}{TL_{ik}^2} \quad (29)$$

Despejando TL_{ik}^2 , se obtiene:

$$TL_{ik}^2 = \frac{2CA_{ik}PA_{ik}}{\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}} \quad (30)$$

Entonces,

$$TL_{ik} = \sqrt{\frac{2CA_{ik}PA_{ik}}{\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}}}, \forall i, k \quad (31)$$

Por lo tanto, la restricción (25) $0 \leq TL_{ik} \leq PA_{ik}$, $\forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p$, puede ser reescrita como:

$$CA_{ik}\lambda_{ik} \leq PA_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) \frac{CM_{ik}}{2}, \forall i, k \quad (32)$$

Donde, λ_{ik} es una variable binaria. $\lambda_{ik} = 1$ cuando $PA_{ik} > 0$ y $\lambda_{ik} = 0$ cuando $PA_{ik} = 0$. Entonces la ecuación:

$$0 \leq TL_{ik} \leq PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (25)$$

Es equivalente a:

$$PA_{ik}^- \delta_{ik} \leq PA_{ik} \leq \text{mínimo}(TP_i, DEM_{jk}), \forall i, k \quad (33)$$

Tomando en consideración la ecuación

$$TL_{ik} = \sqrt{\frac{2CA_{ik}PA_{ik}}{\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}}}, \forall i, k \quad (31)$$

Y la ecuación

$$PA_{ik}^- \delta_{ik} \leq PA_{ik} \leq \text{mínimo}(TP_i, DEM_{jk}), \forall i, k \quad (33)$$

El modelo PATL-FT puede ser igual a un problema de asignación:

$$\text{Minimizar } CT_4 = \sum_i \sum_k CP_{ik}PA_{ik} + \sqrt{2CA_{ik}PA_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}} + \sum_i \sum_j \delta_{ij} V_{ij} \quad (34)$$

Sujeto a:

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j DEM_{jk}, k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik} SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción balance entre la capacidad de producción y flujo de transporte (desde las plantas hacia los distribuidores) para cada planta, es decir, es el balance entre la cantidad de producción y el flujo del transporte en cada planta.

$$\sum_k PA_{ik} = \sum_j V_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Restricción balance entre la demanda de productos y el flujo de transporte de cada distribuidor, es decir esta restricción, representa el balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$\sum_i V_{ij} = \sum_k DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Restricción balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$0 \leq V_{ij} \leq \sum_k DEM_{jk}, \forall i, j \quad (26)$$

Restricción limite.

$$PA_{ik}^- \delta_{ik} \leq PA_{ik} \leq \text{minimo}(TP_i, DEM_{jk}), \forall i, k \quad (33)$$

Para un par de plantas i y producto k , la razón del primer término dividido en el término medio de la ecuación (34) incrementa con el valor de S_{ik} y se aproxima a:

$$m_{ik} = \frac{CP_{ik}}{\sqrt{2CA_{ik}CM_{ik}(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i})}} \sqrt{PA_{ik}} \quad (35)$$

Sea

$$M_{ik} = (1 + 1/m_{ik})CP_{ik} \quad (36)$$

Entonces, el PATL-FT puede ser aproximadamente reescrito como:

$$\text{Minimizar } CT_5 = \sum_i \sum_k M_{ik} PA_{ik} + \sum_i \sum_j \delta_{ij} V_{ij} \quad (37)$$

De hecho, la expresión $\sum_i \sum_k M_{ik} PA_{ik}$ es equivalente a

$$\sum_i \sum_k CP_{ik} PA_{ik} + \sqrt{2CA_{ik} PA_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}}$$

como se demuestra a continuación:

$$\sum_i \sum_k M_{ik} PA_{ik} =$$

$$\sum_i \sum_k CP_{ik} PA_{ik} + \sqrt{2CA_{ik} PA_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}}$$

$$m_{ik} = CP_{ik} \sqrt{2CA_{ik} CM_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)}$$

$$M_{ik} = (1 + 1/m_{ik})CP_{ik}$$

$$M_{ik} PA_{ik} = (1 + 1/m_{ik})CP_{ik} PA_{ik}$$

$$M_{ik} PA_{ik} = CP_{ik} PA_{ik} + \frac{CP_{ik} PA_{ik}}{m_{ik}}$$

$$M_{ik} PA_{ik} = CP_{ik} PA_{ik} + \frac{CP_{ik} PA_{ik}}{CP_{ik} \sqrt{PA_{ik}} / \sqrt{2CA_{ik} CM_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)}}$$

$$M_{ik} PA_{ik} = CP_{ik} PA_{ik} + \frac{CP_{ik} PA_{ik} \sqrt{2CA_{ik} CM_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)}}{CP_{ik} \sqrt{PA_{ik}}}$$

$$M_{ik} PA_{ik} = CP_{ik} PA_{ik} + \sqrt{PA_{ik}} \sqrt{2CA_{ik} CM_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)}$$

$$M_{ik} PA_{ik} = CP_{ik} PA_{ik} + \sqrt{2CA_{ik} PA_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}}$$

Aplicando sumatorias

$$\sum_i \sum_k M_{ik} PA_{ik} = \sum_i \sum_k CP_{ik} PA_{ik} + \sqrt{2CA_{ik} PA_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}}$$

Retomando el modelo, la función objetivo y las restricciones son:

$$\text{Minimizar } CT_5 = \sum_i \sum_k M_{ik} PA_{ik} + \sum_i \sum_j \delta_{ij} V_{ij} \quad (38)$$

Sujeto a:

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j DEM_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik} SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción balance entre la capacidad de producción y flujo de transporte (desde las plantas hacia los distribuidores) para cada planta, es decir, es el balance entre la cantidad de producción y el flujo del transporte en cada planta.

$$\sum_k PA_{ik} = \sum_j V_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Restricción balance entre la demanda de productos y el flujo de transporte de cada distribuidor, es decir esta restricción, representa el balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$\sum_i V_{ij} = \sum_k DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Restricción balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$0 \leq V_{ij} \leq \sum_k DEM_{jk}, \forall i, j \quad (26)$$

Restricción limite.

$$PA_{ik}^- \delta_{ik} \leq PA_{ik} \leq \text{mínimo}(TP_i, DEM_{jk}), \forall i, k \quad (33)$$

El PATL-FT puede ser resuelto por programación lineal basada en la siguiente heurística AH-LPM (algoritmo heurístico AH-LPM para asignación de producción y tamaños de lotes con múltiples productos).

C. Procedimiento heurístico AH-LPM - Determina el tamaño del lote de producción Z_{ik} y producción asignada S_{ik} con múltiples productos.

PASO 1. Inicialice las iteraciones con $t = 0$. Encuentre una solución factible inicial PA_{ik}^0 y V_{ij}^0 resolviendo el límite superior del programa lineal:

$$\text{Minimizar } CT_5 = \sum_i \sum_k CP_{ik} PA_{ik} + \sum_i \sum_j \delta_{ij} V_{ij} \quad (39)$$

Sujeto a:

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j DEM_{jk}, k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik} SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción balance entre la capacidad de producción y flujo de transporte (desde las plantas hacia los distribuidores) para cada planta, es decir, es el balance entre la cantidad de producción y el flujo del transporte en cada planta.

$$\sum_k PA_{ik} = \sum_j V_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Restricción balance entre la demanda de productos y el flujo de transporte de cada distribuidor, es decir esta restricción, representa el balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$\sum_i V_{ij} = \sum_k DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Dejamos que el objetivo sea CT_5^0 . Para hallar los tamaños de lotes de producción (Z_{ik}), sustituya S_{ik}^0 en la ecuación:

$$TL_{ik} = \sqrt{\frac{2CA_{ik}PA_{ik}}{\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)CM_{ik}}}, \forall i, k \quad (31)$$

PASO 2. Determinar la solución óptima factible local para PATL-FT por:

PASO 2. A) Sustituya PA_{ik}^t en la ecuación

$$m_{ik} = \frac{CP_{ik}}{\sqrt{2CA_{ik}CM_{ik}\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)}} \sqrt{PA_{ik}} \quad (36)$$

para determinar el coeficiente M_{ik}^t

$$M_{ik} = \left(1 + \frac{1}{m_{ik}}\right) CP_{ik} \quad (37)$$

PASO 2.B) Encuentre una nueva solución factible para PA_{ik}^{t+1} y V_{ij}^{t+1} resolviendo PATL-FT usando el método simplex.

$$\text{Minimizar } CT_5 = \sum_i \sum_k M_{ik} PA_{ik} + \sum_i \sum_j \delta_{ij} V_{ij} \quad (38)$$

Sujeto a:

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j DEM_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik} SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción balance entre la capacidad de producción y flujo de transporte (desde las plantas hacia los distribuidores) para cada planta, es decir, es el balance entre la cantidad de producción y el flujo del transporte en cada planta.

$$\sum_k PA_{ik} = \sum_j V_{ij}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Restricción balance entre la demanda de productos y el flujo de transporte de cada distribuidor, es decir esta restricción, representa el balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$\sum_i V_{ij} = \sum_k DEM_{jk}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Restricción limite.

$$PA_{ik}^- \delta_{ik} \leq PA_{ik} \leq \text{minimo}(TP_i, DEM_{jk}), \quad \forall i, k \quad (33)$$

PASO 2.C) Sustituya PA_{ik}^{t+1} en la ecuación:

$$TL_{ik} = \sqrt{\frac{2CA_{ik}PA_{ik}}{\left(1 - \left(\frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)\right)CM_{ik}}}, \quad \forall i, k \quad (31)$$

Para determinar TL_{ik}^{t+1} , y calculando la correspondiente función objetivo CT_4^{t+1} como en la ecuación

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } CT_4 = & \\ & \sum_i \sum_k CP_{ik} PA_{ik} + \sqrt{2CA_{ik}PA_{ik} \left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right) CM_{ik}} + \\ & \sum_i \sum_j \delta_{ij} V_{ij} \end{aligned} \quad (34)$$

Sujeto a:

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j DEM_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik} SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción balance entre la capacidad de producción y flujo de transporte (desde las plantas hacia los distribuidores) para cada planta, es decir, es el balance entre la cantidad de producción y el flujo del transporte en cada planta.

$$\sum_k PA_{ik} = \sum_j V_{ij}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Restricción balance entre la demanda de productos y el flujo de transporte de cada distribuidor, es decir esta restricción, representa el balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$\sum_i V_{ij} = \sum_k DEM_{jk}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Restricción limite.

$$PA_{ik}^- \delta_{ik} \leq PA_{ik} \leq \text{minimo}(TP_i, DEM_{jk}), \quad \forall i, k \quad (33)$$

PASO 3. Se verifica la condición terminada. Si $PA_{ik}^{t+n} = PA_{ik}^t$ y $V_{ik}^{t+n} = V_{ik}^t$ (n cualquier iteración después de t o $t =$ número de iteraciones preespecificadas) entonces pare; de lo contrario, incremente $t=t+1$ y retorne al paso 2.

PASO 4. Determine la solución óptima de tal forma que CT_4^* (óptimo) = $\text{minimo} \{CT_4^t\}$.

D. Formulación subproblema TQO-M (Subproblema de Decisión integrada entre planeación del transporte y cantidad ordenada dada la producción Asignada. Relación planta- distribuidor)

La función objetivo del modelo TQO-M es:

$$\begin{aligned} \text{Min } CT_6 = & \sum_i \sum_j \sum_k \left\{ \frac{1}{2} (CM_{ik} + CD_{jk}) X_{ijk} + \right. \\ & \left. C_{ij} Y_{ijk} + \frac{CO_{jk} Y_{ijk}}{X_{ijk}} \right\} - \sum_i \sum_j \delta_{ij} \sum_k Y_{ijk} \end{aligned} \quad (29)$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto (plantas-distribuidores).

$$\sum_i Y_{ijk} = DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n, \forall k = 1, 2, \dots, p \quad (23)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y producción de cada producto (plantas - distribuidores).

$$\sum_j Y_{ijk} = PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, \forall k = 1, 2, \dots, p \quad (24)$$

Restricción límite. Restricción que indica el límite superior del tamaño del lote y la producción anual, flujo de transporte, y cantidad de transporte y cantidad ordenada respectivamente.

$$0 \leq X_{ijk} \leq Y_{ijk} \leq \text{Mínimo} (DEM_{jk}, PA_{ik}), \forall i, j, k \quad (27)$$

El término de la función objetivo del subproblema PATL-FT representa los costos del flujo de transporte, mientras que el multiplicador Lagrange δ_{ij} es interpretado como el costo del transporte de las unidades enviadas y entregadas desde la planta i al distribuidor j .

Por ejemplo, puede ser determinado en términos de un coeficiente de costo de transporte, así:

$$\delta_{ij} = C_{ij} \gamma \quad (30)$$

El coeficiente γ del multiplicador de Lagrange satisface $0 \leq \gamma \leq 1$. Puede ser interpretado como una función del costo de transporte en la cantidad de producción asignada cuando se hacen decisiones articuladas.

$\gamma = 0$, si la decisión de asignar producción depende completamente de la capacidad de producción y costos de producción.

$\gamma = 1$, si el costo de transporte juega el mismo papel importante como la capacidad de producción y los costos de producción dentro de la producción asignada.

Para especificar la instancia del problema de decisión integrada MDI-M (Planta - distribuidor), el óptimo γ refleja el actual impacto de la planeación del transporte en las decisiones de la asignación de la producción.

En efecto, la descomposición relajada Lagrange es una descomposición combinada en dos capas con multiplicadores de Lagrange. Usando el método de descomposición en dos capas en donde se identifica que la primera capa determina la producción asignada y el tamaño del lote como también el flujo de transporte. Entonces, dada la producción asignada, la planeación del transporte y la cantidad ordenada son determinados en una segunda capa. Particularmente cuando el coeficiente del multiplicador Lagrange $\gamma = 0$, como se ha mencionado, la descomposición es completamente equivalente al método de descomposición en dos capas.

Después de asignar la producción anual y el tamaño del lote de producción para cada par planta y producto, el siguiente procedimiento es determinar la cantidad anual a transportar para cada par individual de plantas y distribuidores, el cual apunta al subproblema TQO-M.

El uso de heurísticas efectivas es más aceptable que el uso de las técnicas tradicionales de programación no lineal para problemas extensos.

Para la tripleta de planta i , distribuidor j y producto k , dado Y_{ijk} la cantidad transportada y X_{ijk} la cantidad ordenada, X_{ijk} está determinada de forma cerrada como:

$$X_{ijk} = \sqrt{\frac{2CO_{jk}Y_{ijk}}{(CD_{jk} + CM_{ik})}}, \forall (i, j, k) \quad (40)$$

Subsecuentemente, la ecuación

$$0 \leq X_{ijk} \leq Y_{ijk}, \forall (i, j, k) \quad (41)$$

Es equivalente a:

$$\frac{2CO_{jk}}{(CD_{jk}+CM_{jk})\lambda(Y_{ijk})} \leq Y_{ijk} \leq \text{mínimo}(PA_{ik}, DEM_{jk}), \forall (i, j, k) \quad (42)$$

Donde $\lambda(Y_{ijk}) = 1$ cuando $Y_{ijk} > 0$, y de lo contrario es cero.

Tomando en consideración la ecuación (42), el modelo TQO-M puede ser reescrito como:

$$\text{Minimizar } CT_7 = \sum_k \sum_i \sum_j B_{ijk} Y_{ijk} \quad (43)$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_i Y_{ijk} = DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y producción de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_j Y_{ijk} = PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

Restricción límite de unidades a enviar.

$$\frac{2CO_{jk}}{(CD_{jk}+CM_{jk})\lambda(Y_{ijk})} \leq Y_{ijk} \leq \text{mínimo}(PA_{ik}, DEM_{jk}), \forall (i, j, k) \quad (42)$$

$$\text{Donde } B_{ijk} = \frac{CO_{jk}}{X_{ijk}} + C_{ij} \quad (44)$$

El modelo TQO-M dado en la ecuación $\text{Minimizar } CT_7 = \sum_k \sum_i \sum_j B_{ijk} Y_{ijk}$, es similar para un modelo múltiple TQO con la adición de la dimensión de los productos y la adición de los costos de transporte C_{ij} . Así que, el modelo TQO-M puede ser resuelto por la heurística revisada BH-COM.

Conocidas PA_{ik} y TL_{ik} calculadas con el heurístico AH-LPM se procede a calcular Y_{ijk} y X_{ijk} .

E. Procedimiento heurístico BH-COM - Determina la cantidad enviada Y_{ijk} y cantidad ordenada X_{ijk} relación planta- distribuidor

PASO 1) Iteración $t=0$. Se encuentra una solución factible Y_{ijk}^0 resolviendo el siguiente modelo PL:

$$\text{Minimizar } TC = \sum_i \sum_j \sum_k (CM_{ik} + CD_{jk} + C_{ij}) Y_{ijk} \quad (45)$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_i Y_{ijk} = DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y producción de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_j Y_{ijk} = PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

Restricción límite de unidades a enviar

$$\frac{2CO_{jk}}{(CD_{jk}+CM_{jk})\lambda(Y_{ijk})} \leq Y_{ijk} \leq \text{mínimo}(PA_{ik}, DEM_{jk}), \forall (i, j, k) \quad (42)$$

Resolviendo este modelo se obtiene Y_{ijk}^0 . Se reemplaza Y_{ijk}^0 en la ecuación (40).

$$X_{ijk} = \sqrt{\frac{2CO_{jk}Y_{ijk}}{(CD_{jk}+CM_{ik})}}, \forall (i, j, k) \quad (40)$$

Y se obtiene X_{ijk} de la iteración t .

PASO 2. Determinar una solución básica factible local para TQO por:

PASO 2A. Sustituir X_{ijk}^f en:

$$B_{ijk} = \frac{CO_{jk}}{X_{ijk}} + C_{ij} \quad (44)$$

Para determinar el coeficiente B_{ijk}^t .

PASO 2B. Encontrar una nueva solución básica factible Y_{ijk}^t resolviendo TQO-LP (TQO por programación lineal) con los nuevos coeficientes B_{ijk}^t .

$$\text{Minimizar } CT_7 = \sum_k \sum_l \sum_j B_{ijk} Y_{ijk} \quad (43)$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_l Y_{ijk} = DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y producción de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_j Y_{ijk} = PA_{lk}, \forall l = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

Restricción límite de unidades a enviar.

$$\frac{2CO_{jk}}{(CD_{jk} + CM_{jk})\lambda(Y_{ijk})} \leq Y_{ijk} \leq \text{mínimo}(PA_{lk}, DEM_{jk}), \forall (i, j, k) \quad (42)$$

$$\text{Donde } B_{ijk} = \frac{CO_{jk}}{X_{ijk}} + C_{ij} \quad (44)$$

Donde, es una variable binaria, entonces, $\lambda(Y_{ijk}) = 1$ cuando $Y_{ijk} > 0$, y de lo contrario es cero. En este paso se obtiene Y_{ijk}^{t+1} .

PASO 2C. Sustituir Y_{ijk}^{t+1} en la ecuación

$$X_{ijk}^{t+1} = \sqrt{\frac{2CO_{jk}Y_{ijk}}{(CD_{jk} + CM_{jk})}}, \forall (i, j, k) \quad (45)$$

Y se obtiene X_{ijk}^{t+1} (cantidad ordenada).

PASO 3. Verificar la condición terminada.

$$\text{Si } Y_{ijk}^{t+1} = Y_{ijk}^t \quad (46)$$

Y simultáneamente se cumple que:

$$X_{ijk}^{t+1} = X_{ijk}^t \quad (47)$$

Termina el proceso porque la heurística o algoritmo converge en n iteraciones y se obtienen los valores óptimos de Y_{ijk}^* y X_{ijk}^* .

F. Procedimiento heurístico DH-COM - Determina la cantidad enviada Y_{ijk} y cantidad ordenada X_{ijk} relación distribuidor-detallista

Conocidas Y_{ijk} y X_{ijk} calculadas en el heurístico BH-COM, se procede a calcular Y_{ijk} y X_{ijk} , con el procedimiento heurístico DH-COM.

$$X_{ijk} = \sqrt{\frac{2CO_{jk}Y_{ijk}}{(CD_{lk} + CD_{jk})}}, \forall (j, l, k) \quad (48)$$

Subsecuentemente, la ecuación

$$0 \leq X_{ijk} \leq Y_{ijk}, \forall (j, l, k) \quad (49)$$

Es equivalente a:

$$\frac{2CO_{lk}}{(CD_{lk} + CD_{jk})\lambda(Y_{ijk})} \leq Y_{ijk} \leq \text{mín}(DEM_{jk}, DEM_{lk}), \forall (j, l, k) \quad (50)$$

Donde, es una variable binaria, entonces, $\lambda(Y_{ijk}) = 1$ cuando $Y_{ijk} > 0$, y de lo contrario es cero

Tomando en consideración la ecuación

$$\frac{2CO_{lk}}{(CD_{lk} + CD_{jk})\lambda(Y_{ijk})} \leq Y_{ijk} \leq \text{mín}(DEM_{jk}, DEM_{lk}), \forall (j, l, k) \quad (50)$$

El modelo TQOD-M (Modelo para el detallista) puede ser reescrito como:

$$\text{Minimizar } CT_B = \sum_k \sum_j \sum_l B_{ijk} Y_{ijk} \quad (51)$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre distribuidores y detallistas.

$$\sum = , \forall = 1,2, \dots, = 1,2, \dots \quad (9)$$

Restricción de balance de flujo de transporte de cada producto entre distribuidores y detallistas.

$$\sum = \sum , = 1,2, \dots \quad (11)$$

Restricción límite de unidades a enviar

$$\frac{2}{(+)} \leq \leq (,), \forall (,) \quad (50)$$

$$\text{Donde } = + \quad (52)$$

El modelo TOQD-M dado en la ecuación (51) $\delta = \sum \sum \sum$ puede ser resuelto por la heurística DH-COM. Conocidas , se procede a calcular.

PASO 1) Iteración t=0. Se encuentra una solución factible ⁰ resolviendo el siguiente modelo LP (programación lineal):

$$g = \sum \sum \sum (+ +) \quad (53)$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre distribuidores y detallistas.

$$\sum = , \forall l = 1,2, \dots, o, k = 1,2, \dots, p \quad (9)$$

Restricción de balance de flujo de transporte de cada producto entre distribuidores y detallistas.

$$\sum_{ij} Y_{ijk} = \sum_{jl} Y_{jlk}, k = 1,2, \dots, p \quad (11)$$

Restricción límite de unidades a enviar

$$\frac{2CO_{lk}}{(CD_{lk}+CD_{jk})\lambda(Y_{jlk})} \leq Y_{jlk} \leq \min(DEM_{jk}, DEM_{lk}), \forall (j, l, k) \quad (50)$$

Resolviendo el modelo se obtiene Y_{jlk}^0 . Se reemplaza el valor de Y_{jlk}^0 en

$$X_{jlk} = \sqrt{\frac{2CO_{lk}Y_{jlk}^0}{(CD_{lk}+CD_{jk})}}, \forall (j, l, k) \quad (48)$$

Y obtenemos el valor de X_{jlk} de la iteración t.

PASO 2. Determinar una solución básica factible local para TQOD por:

PASO 2A. Sustituir X_{jlk}^t en:

$$B_{jlk} = \frac{CO_{lk}}{X_{jlk}^t} + C_{jl} \quad (52)$$

Para determinar el coeficiente B_{jlk}^t .

PASO 2B. Encontrar una nueva solución básica factible para Y_{jlk}^t resolviendo TQOD-LP (Modelo para el detallista por programación lineal) con los nuevos coeficientes B_{jlk}^t .

$$\text{Minimizar } CT_B = \sum_k \sum_j \sum_l B_{jlk} Y_{jlk} \quad (51)$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre distribuidores y detallistas.

$$\sum_j Y_{jlk} = DEM_{lk}, \forall l = 1,2, \dots, o, k = 1,2, \dots, p \quad (9)$$

Restricción de balance de flujo de transporte de cada producto entre distribuidores y detallistas.

$$\sum_{ij} Y_{ijk} = \sum_{jl} Y_{jlk}, k = 1,2, \dots, p \quad (11)$$

Restricción límite de unidades a enviar

$$\frac{2CO_{lk}}{(CD_{lk}+CD_{jk})\lambda(Y_{jlk})} \leq Y_{jlk} \leq \min(DEM_{jk}, DEM_{lk}), \forall (j, l, k) \quad (50)$$

$$\text{Donde } B_{jlk} = \frac{CO_{lk}}{X_{jlk}^t} + C_{jl} \quad (52)$$

Donde, λ es una variable binaria, entonces, $\lambda(Y_{jlk}) = 1$ cuando $Y_{jlk} > 0$, y de lo contrario es cero. En este paso se obtiene Y_{jlk}^{t+1} .

PASO 2C. Sustituir Y_{jlk}^{t+1} en la ecuación

$$X_{jlk}^{t+1} = \sqrt{\frac{2CO_{lk}Y_{jlk}}{(CD_{lk}+CD_{jk})}}, \forall(j, l, k) \quad (54)$$

Y obtenemos X_{jlk}^{t+1} (cantidad ordenada).

PASO 3. Verificar la condición terminada.

$$\text{Si } Y_{jlk}^{t+1} = Y_{jlk}^t \quad (55)$$

Y simultáneamente se cumple que:

$$X_{jlk}^{t+1} = X_{jlk}^t \quad (56)$$

Termina el proceso porque la heurística o algoritmo converge en n iteraciones y se obtienen los valores óptimos de Y_{jlk}^* y X_{jlk}^* .

IV. APLICACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático se aplica a una empresa llantera que posee dos plantas de producción, 22 centros de distribución, los cuales distribuyen los productos en cada centro de distribución o departamento a los diferentes detallistas llamados centros de servicio o puntos de venta, tal y como se muestra en las figuras 3 y 4. Por razones de disponibilidad de datos e información, el modelo se limitó a la red producción y distribución. El proceso de distribución de las llantas en esta empresa se realiza de la siguiente manera: toda la producción de las plantas de Bogotá y Cali se envían a los centros de servicio del país. Una firma contratada por la compañía realiza la logística de distribución de las llantas a todos los centros de servicio del país. Esta firma coordina el uso de los medios de transporte (camiones de gran tonelaje) para surtir los centros de distribución ubicados en todo el país.



Fig. 3. Proceso de Distribución



Fig. 4. Red logística

Se seleccionaron y agruparon cinco líneas de productos a saber: producto 1 - llantas para auto, producto 2 - llantas para camioneta, producto 3 - llantas para buseta, producto 4 - llantas para camión pequeño y finalmente producto 5 - llantas para camión grande.

Parámetros del problema:

Tabla I. DEMANDA DEM_{jk}

	AUTO	CAMIO-NETA	BUSETA	CAM. PEQ	CAM. GRANDE
ANTIOQUIA	21904	25338	23350	10591	17567
ATLANTICO	18775	21718	20014	9078	15057
BOLIVAR	7823	9049	8339	3782	6274
CALDAS	4694	5430	5004	2269	3764
CASANARE	1565	1810	1668	756	1255
CAUCA	4694	5430	5004	2269	3764
CESAR	1565	1810	1668	756	1255
CORDOBA	4694	5430	5004	2269	3764
C/MARCA	93875	108591	100071	45388	75286
HUILA	3129	3620	3336	1513	2510
MAGDALENA	1565	1810	1668	756	1255
META	3129	3620	3336	1513	2510
NARIÑO	1565	1810	1668	756	1255
NORTE SIDER	6258	7239	6671	3026	5019
QUINDIO	9387	10859	10007	4539	7529
RISARALDA	7823	9049	8339	3782	6274
SIDER	7823	9049	8339	3782	6274
SUCRE	1565	1810	1668	756	1255
TOLIMA	17210	19908	18346	8321	13802
VALLE	39115	45246	41696	18912	31369
TOTAL	258156	298626	275196	124818	207036

Tabla II. COSTO DE PRODUCCIÓN UNITARIO CP_{jk}

	AUTO	CAMIO-NETA	BUSETA	CAM. PEQ	CAM. GRANDE
PLANTA A	115000	156500	325700	375680	583655
PLANTA B	113785	154300	330625	386970	596348

Tabla III. COSTO DE ALISTAMIENTO CA_{jk}

	AUTO	CAMIO-NETA	BUSETA	CAM. PEQ	CAM. GRANDE
PLANTA A	3233248	3605664	3808800	4443600	4993760
PLANTA B	3038576	3410992	3614128	4248928	4799088

Tabla IV. COSTO MANTENIMIENTO INVENTARIO PLANTAS CM_{jk}

	AUTO	CAMIO-NETA	BUSETA	CAM. PEQ	CAM. GRANDE
PLANTA A	439	490	518	604	679
PLANTA B	413	463	491	577	652

Tabla V. COSTOS MANTENIMIENTO INVENTARIO DISTRIBUIDORES CD_{jk}

	AUTO	CAMIO-NETA	BUSETA	CAM. PEQ	CAM. GRANDE
ANTIOQUIA	377	421	445	520	585
ATLANTICO	318	362	386	461	526
BOLIVAR	327	371	395	470	535
CALDAS	292	336	360	435	500
CASANARE	267	311	335	410	475
CAUCA	300	344	368	443	508
CESAR	309	353	377	452	517
CORDOBA	337	381	405	480	545
C/MARCA	382	426	450	525	590
HUILA	321	365	389	464	529
MAGDALENA	357	401	425	500	565
META	347	391	415	490	555
NARIÑO	325	369	393	468	533
NORTE SIDER	360	404	428	503	568
QUINDIO	282	326	350	425	490
RISARALDA	315	359	383	458	523
SIDER	366	410	434	509	574
SUCRE	348	392	416	491	556
TOLIMA	378	422	446	521	586
VALLE	359	403	427	502	567

Tabla VI. ESTÁNDARES DE PRODUCCIÓN SD_{jk}

	AUTO	CAMIO-NETA	BUSETA	CAM. PEQ	CAM. GRANDE
PLANTA A	0,35	0,48	0,59	0,91	1,04
PLANTA B	0,39	0,45	0,58	0,95	1,03

Tabla VII. CAPACIDADES DE PRODUCCIÓN PLANTAS Q_i

PLANTA A	850000
PLANTA B	758000

Tabla VIII. TASAS DE PRODUCCIÓN PLANTAS TP_i

PLANTA A	1685987
PLANTA B	1433089

Tabla IX. COSTOS DE ORDENAR CO_{jk}

	AUTO	CAMIO- NETA	BUSETA	CAM. PEQ	CAM. GRANDE
ANTIOQUIA	797732	890836	941620	1100320	1237860
ATLANTICO	672888	765992	816776	975476	1113016
BOLIVAR	691932	785036	835820	994520	1132060
CALDAS	617872	710976	761760	920460	1058000
CASANARE	564972	658076	708860	867560	1005100
CAUCA	634800	727904	778688	937388	1074928
CESAR	653844	746948	797732	956432	1093972
CORDOBA	713092	806196	856980	1015680	1153220
C/MARCA	808312	901416	952200	1110900	1248440
HUILA	679236	772340	823124	981824	1119364
MAGDALENA	755412	848516	899300	1058000	1195540
META	734252	827356	878140	1036840	1174380
NARIÑO	687700	780804	831588	990288	1127828
NORTE SIDER	761760	854864	905648	1064348	1201888
QUINDIO	596712	689816	740600	899300	1036840
RISARALDA	666540	759644	810428	969128	1106668
SIDER	774456	867560	918344	1077044	1214584
SUCRE	736368	829472	880256	1038956	1176496
TOLIMA	799848	892952	943736	1102436	1239976
VALLE	759644	852748	903532	1062232	1199772

Tabla X. COSTOS DE TRANSPORTE C_{ij}

	PLANTA A	PLANTA B
ANTIOQUIA	3025	2456
ATLANTICO	5173	5154
BOLIVAR	4810	5137
CALDAS	1913	1573
CASANARE	6315	5446
CAUCA	3364	632
CESAR	3325	4609
CORDOBA	3412	2981
C/MARCA	424	2499
HUILA	1645	2285
MAGDALENA	4542	5132
META	1246	3164
NARIÑO	4314	2392
NORTE SIDER	3332	5091
QUINDIO	1701	1113
RISARALDA	1754	1261
SIDER	2293	4050
SUCRE	3698	3230
TOLIMA	1331	1677
VALLE	2499	212

V. PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

HEURISTICA AH-LPM. Aplicar la heurística AH-LPM para determinar la asignación de producción anual PA_{ik} y los tamaños de lotes de producción TL_{ik} con múltiples productos.

ITERACIÓN 1:

PASO 1. Inicialice las iteraciones con $t = 0$. Encuentre una solución factible inicial PA_{ik}^0 y V_{ij}^0 resolviendo el límite superior del programa lineal:

$$\text{Minimizar } CT_5 = \sum_i \sum_k CP_{ik} PA_{ik} + \sum_i \sum_j \delta_{ij} V_{ij} \quad (39)$$

Sujeto a:

Restricción de balance entre producción y demanda de cada producto.

$$\sum_i PA_{ik} = \sum_j DEM_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

Restricción de capacidad de las plantas de producción.

$$0 \leq \sum_k PA_{ik} SD_{ik} + Q_i^H - Q_i^E = Q_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Restricción balance entre la capacidad de producción y flujo de transporte (desde las plantas hacia los distribuidores) para cada planta, es decir, es el balance entre la cantidad de producción y el flujo del transporte en cada planta.

$$\sum_k PA_{ik} = \sum_j V_{ij}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Restricción balance entre la demanda de productos y el flujo de transporte de cada distribuidor, es decir esta restricción, representa el balance entre la demanda de los productos y el flujo de transporte en cada distribuidor.

$$\sum_i V_{ij} = \sum_k DEM_{jk}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Resolviendo este modelo obtenemos los valores de PA_{ik}^0 en la iteración $t=0$. Este modelo se corrió en gams arrojando los siguientes resultados:

Tabla XI. CANTIDAD DE PRODUCCIÓN ANUAL ASIGNADA PA_{ik} EN LA ITERACIÓN 1

	PROD1	PROD2	PROD3	PROD4	PROD5
PLANTA 1			275197	124819	207036
PLANTA 2	258156	298626			
PRODUCCION	258156	298626	275197	124819	207036
DEMANDA	258156	298626	275197	124819	207036

PASO 2. Conocidos PA_{ik} , halle los tamaños de lotes de producción TL_{ik} . Para hallar los tamaños de lotes de producción TL_{ik} , sustituimos PA_{ik}^0 en la ecuación:

$$TL_{ik} = \sqrt{\frac{2CA_{ik}PA_{ik}}{\left[1 - \left(\frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)\right]CM_{ik}}}, \forall i, k \quad (31)$$

obteniéndose los valores de los lotes de producción dados en la siguiente tabla:

Tabla XII. TAMAÑO DEL LOTE DE PRODUCCIÓN TL_{ik} EN LA ITERACIÓN 1

Lote	Z13	Z14	Z15	Z21	Z22
Asignado	69578	44545	58943	68081	74518

PASO 3. Determinamos m_{ik} y M_{ik} . Para hallar m_{ik} , Sustituimos el valor de PA_{ik}^1 en la ecuación:

$$m_{ik} = \frac{CP_{ik}}{\sqrt{2CA_{ik}CM_{ik}\left(1 - \frac{PA_{ik}}{TP_i}\right)}} \sqrt{PA_{ik}} \quad (36)$$

Y para determinar el coeficiente M_{ik}^1 , sustituimos el valor de m_{ik} en la ecuación:

$$M_{ik} = \left(1 + \frac{1}{m_{ik}}\right)CP_{ik} \quad (37)$$

obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla XIII. VALORES m_{ik} y M_{ik} EN LA ITERACIÓN 1

	CP_{ik}	m_{ik}	M_{ik}
e13	325700	2975	325809
e14	375680	1883	375880
e15	583655	3444	583824
e21	113785	1275	113874
e22	154300	1685	154392

PASO 4. Correr el modelo con los nuevos valores m_{ik} y obtener nuevos valores de PA_{ik} .

Tabla XIV. CANTIDAD DE PRODUCCIÓN ANUAL ASIGNADA PA_{ik} EN LA ITERACIÓN 2

	PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1	258156	298626	0	0	0
PLANTA 2	0	0	275197	124819	207036
PRODUCCION	258156	298626	275197	124819	207036

ITERACIÓN 2

PASO 1. Los nuevos valores de PA_{ik} son los obtenidos en el paso 4 de la iteración 1. Entonces ese valor PA_{ik} es PA_{ik}^2 .

PASO 2. Conocidos PA_{ik}^2 , halle los tamaños de lotes de producción TL_{ik} . Para hallar los tamaños de lotes de producción TL_{ik} , sustituimos PA_{ik}^2 en la ecuación (31) obteniéndose los valores de los lotes de producción dados en la siguiente tabla:

Tabla XV. TAMAÑO DEL LOTE DE PRODUCCIÓN TL_{ik} EN LA ITERACIÓN 2

Lote	Z11	Z12	Z23	Z24	Z25
Asignado	66986	74518	70804	44683	59685

PASO 3. Determinamos m_{ik} y M_{ik} . Para hallar m_{ik} , Sustituimos el valor de PA_{ik}^2 en la ecuación 36 y para determinar el coeficiente M_{ik} , sustituimos el valor de m_{ik} en la ecuación (37), obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla XVI. VALORES m_{ik} y M_{ik} EN LA ITERACIÓN 2

	m_{ik}	M_{ik}
e11	1191	115097
e12	1586	156599
e23	3239	330727
e24	2043	387159
e25	3708	596509

PASO 4. Correr el modelo con los nuevos valores m_{ik} y obtener nuevos valores de PA_{ik} .

Tabla XVII. CANTIDAD DE PRODUCCIÓN ANUAL ASIGNADA PA_{ik} EN LA ITERACIÓN 3

	PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1			275197	124819	207036
PLANTA 2	258156	298626			
PRODUCCION	258156	298626	275197	124819	207036

ITERACIÓN 3

PASO 1. Los nuevos valores de PA_{ik} son los obtenidos en el paso 4 de la iteración 2. Entonces ese valor PA_{ik} es PA_{ik}^3 .

PASO 2. Conocidos PA_{ik}^3 , se calculan los tamaños de lotes de producción TL_{ik} . Para hallar los tamaños de lotes de producción TL_{ik} , sustituimos PA_{ik}^3 en la

ecuación (31) obteniéndose los valores de los lotes de producción dados en la siguiente tabla:

Tabla XVIII. TAMAÑO DEL LOTE DE PRODUCCIÓN TL_{ik} EN LA ITERACIÓN 3

Lote	Z13	Z14	Z15	Z21	Z22
Asignado	69578	44545	58943	68081	62823

PASO 3. Determinamos m_{ik} y M_{ik} . Para hallar m_{ik} , Sustituimos el valor de PA_{ik}^3 en la ecuación (36) y para determinar el coeficiente M_{ik} , sustituimos el valor de m_{ik} en la ecuación (37), obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla XIX. VALORES m_{ik} y M_{ik} EN LA ITERACIÓN 3

	m_{ik}	M_{ik}
e13	2974,89246	325809
e14	1882,99717	375880
e15	3444,49537	583824
e21	1274,7058	113874
e22	1685,44411	154392

PASO 4. Se corre el modelo con los nuevos valores m_{ik} , para obtener nuevos valores de PA_{ik} .

Tabla XX. CANTIDAD DE PRODUCCIÓN ANUAL ASIGNADA PA_{ik} EN LA ITERACIÓN 4

	PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1	258156	298626	0	0	0
PLANTA 2	0	0	275197	124819	207036
PRODUCCION	258156	298626	275197	124819	207036

ITERACIÓN 4.

PASO 1. Los nuevos valores de PA_{ik} son los obtenidos en el paso 4 de la iteración 3. Entonces ese valor PA_{ik} es PA_{ik}^4 .

PASO 2. Conocido PA_{ik} , halle los tamaños de lotes de producción TL_{ik} . Para hallar los tamaños de lotes de producción TL_{ik} , sustituimos PA_{ik}^4 en la ecuación (31) obteniéndose los valores de los lotes de producción dados en la siguiente tabla:

Tabla XXI. TAMAÑO DEL LOTE DE PRODUCCIÓN TL_{ik} EN LA ITERACIÓN 4

Lote	Z11	Z12	Z23	Z24	Z25
Asignado	66986	74518	70804	44863	59685

PASO 3. Determinamos m_{ik} y M_{ik} . Para hallar m_{ik} , Sustituimos el valor de PA_{ik}^4 en la ecuación (35) y para determinar el coeficiente M_{ik} , sustituimos el valor de

m_{ik} en la ecuación (36), obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla XXII. VALORES m_{ik} y M_{ik} EN LA ITERACIÓN 4

	m_{ik}	M_{ik}
e11	1191,27644	115097
e12	1586,16797	156599
e23	3238,77271	330727
e24	2042,91395	387159
e25	3708,25726	596509

PASO 4. Corremos el modelo con los nuevos valores m_{ik} y obtenemos los nuevos valores de PA_{ik} .

Tabla XXIII. CANTIDAD DE PRODUCCIÓN ANUAL ASIGNADA PA_{ik} EN LA ITERACIÓN 4

	PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1			275197	124819	207036
PLANTA 2	258156	298626			
PRODUCCION	258156	298626	275197	124819	207036

Como se observa en la tabla XXIV, el algoritmo converge en la iteración 4, porque la iteración 2 vuelve y se repite en la iteración 4. Por lo tanto, la solución de la producción asignada anual para las diferentes plantas y los diferentes productos está dada en la iteración 4.

Los resultados de V_{ij} en las diferentes iteraciones se dan en la tabla XXVII. Como $PA_{ij}^4 = PA_{ij}^2$ y $V_{ij}^4 = V_{ij}^2$ (iteraciones 2 y 4 son iguales) y tienen el menor costo, entonces se obtiene el óptimo y el proceso termina.

Tabla XXIV. RESULTADOS DE PA_{ik} EN LAS DIFERENTES ITERACIONES

	ITER 1	ITER2	ITER3	ITER4	SOLUCION
S11	0	258156	0	258156	258156
S12	0	298626	0	298626	298626
S13	275197	0	275197	0	0
S14	124819	0	124819	0	0
S15	207.036	0	207036	0	0
S21	258156	0	258156	0	0
S22	298626	0	298626	0	0
S23	0	275197	0	275197	275197
S24	0	124819	0	124819	124819
S25	0	207036	0	207036	207036
OBJE-TIVO		\$ 560.950.000	\$ 561.179.034	\$ 560.945.028	

En conclusión, los óptimos son:

Tabla XXV. CANTIDAD DE PRODUCCIÓN ANUAL ASIGNADA DE PA_{ik} OPTIMA

	PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1	258156	298626	0	0	0
PLANTA 2	0	0	275197	124819	207036
PRODUCCION	258156	298626	275197	124819	207036
DEMANDA	258156	298626	275196	124819	207036

Tabla XXVI. TAMAÑO DEL LOTE DE PRODUCCIÓN TL_{ij} OPTIMOS

Lote	Z11	Z12	Z23	Z24	Z25
Asignado	66986	74518	70804	44863	59685

HEURISTICA BH-COM. Aplicar la heurística BH-COM para obtener las cantidades a enviar de cada producto desde cada planta a cada distribuidor (Y_{ijk}) y las cantidades a ordenar desde el distribuidor j a la planta i para cada producto tipo k (X_{ijk}).

Conocidas PA_{ik} , calculadas en el heurístico AH-LPM, se procede a calcular Y_{ijk} .

PASO 1) Iteración $t=0$. Conocidas PA_{ik} y definida como parámetro en este modelo PL, se encuentra una solución factible Y_{ijk}^0 resolviendo el siguiente modelo PL:

$$\text{Minimizar } TC = \sum_i \sum_j \sum_k (CM_{ik} + CD_{jk} + C_{ij})Y_{ijk} \quad (45)$$

Sujeto a:

Tabla XXVII. RESULTADOS DE V_{ij} EN LAS DIFERENTES ITERACIONES

	ITER 1	ITER2	ITER3	ITER4	SOLUCION
W11					
W12	59363	9093	59363	9093	9093
W13	61615	61615	61615	61615	61615
W14					
W15					
W16					
W17	17116	17116	17116	17116	17116
W18					
W19	205380	205380	205380	205380	205380
W1-10	34230	34230	34230	34230	34230
W1-11	20539	20539	20539	20539	20539
W1-12	30808	30808	30808	30808	30808
W1-13					
W1-14	47923	47923	47923	47923	47923
W1-15					
W1-16					
W1-17	51346	51346	51346	51346	51346

W1-18					
W1-19	78729	78729	78729	78729	78729
W1-20					
W21	95845	95845	95845	95845	95845
W22	22790	73060	22790	73060	73060
W23					
W24	37652	37652	37652	37652	37652
W25	13692	13692	13692	13692	13692
W26	41076	41076	41076	41076	41076
W27					
W28	44499	44499	44499	44499	44499
W29					
W2-10					
W2-11					
W2-12					
W2-13	23962	23962	23962	23962	23962
W2-14					
W2-15	75306	75306	75306	75306	75306
W2-16	58192	58192	58192	58192	58192
W2-17					
W2-18	27383	27383	27383	27383	27383
W2-19					
W2-20	116390	116390	116390	116390	116390

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_i Y_{ijk} = DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y producción de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_j Y_{ijk} = PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

Restricción límite de unidades a enviar

$$\frac{2CO_{jk}}{(CD_{jk} + CM_{jk})\lambda(V_{ijk})} \leq Y_{ijk} \leq \text{mínimo}(PA_{ik}, DEM_{jk}), \forall (i, j, k) \quad (42)$$

Resolviendo este modelo se obtiene Y_{ijk}^0 . Este modelo se resolvió en GAMS, cuyos resultados están dados en la tabla XXVIII.

Una vez obtenido Y_{ijk}^0 , el valor de Y_{ijk}^0 se reemplaza en la ecuación (40).

$$X_{ijk} = \sqrt{\frac{2CO_{jk}Y_{ijk}}{(CD_{jk} + CM_{jk})}}, \forall (i, j, k) \quad (40)$$

Y se obtiene X_{ijk} de la iteración t con los resultados dados en la tabla XXIX.

PASO 2. Determinar una solución básica factible local para TQO por:

PASO 2A. Conocido el valor X_{ijk}^t Sustituirlo en la ecuación (44) para determinar el coeficiente B_{ijk}^t .

$$B_{ijk} = \frac{CO_{jk}}{X_{ijk}} + C_{ij} \quad (44)$$

Los resultados de B_{ijk}^t , se muestran en la tabla XXX.

PASO 2B. Una vez obtenido el valor de B_{ijk}^t , este valor se distingue como parámetro en el modelo TQO-LP y resolviendo este modelo encontramos un nuevo valor de Y_{ijk}^t . El modelo para resolver es:

$$\text{Minimizar } CT_7 = \sum_k \sum_i \sum_j B_{ijk} Y_{ijk} \quad (43)$$

Sujeto a:

Restricción de balance de flujo entre transporte y demanda de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_i Y_{ijk} = DEM_{jk}, \forall j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

Restricción de balance de flujo entre transporte y producción de cada producto entre plantas y distribuidores.

$$\sum_j Y_{ijk} = PA_{ik}, \forall i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

Restricción limite de unidades a enviar.

$$\frac{2CO_{jk}}{(CO_{jk} + CM_{jk})\lambda(Y_{ijk})} \leq Y_{ijk} \leq \text{minimo}(PA_{ik}, DEM_{jk}), \forall (i, j, k) \quad (42)$$

Donde, λ es una variable binaria, entonces, $\lambda(Y_{ijk}) = 1$ cuando $Y_{ijk} > 0$, y de lo contrario es cero. En este paso se obtiene Y_{ijk}^{t+1} . Resolviendo este modelo obtuvimos los resultados de Y_{ijk}^t dados en la tabla XXXI.

PASO 2C. Sustituimos el valor de Y_{ijk}^{t+1} (valores dados en la tabla 31) en la ecuación (45) y se obtiene X_{ijk}^{t+1} (cantidad ordenada), valores dados en la tabla XXXII.

Tabla XXVIII. Y_{ijk} - UNIDADES A TRANSPORTAR

		PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1	DESTINO 1	21260	24593			
PLANTA 1	DESTINO 2	18223	21079			
PLANTA 1	DESTINO 3	13667	15810			
PLANTA 1	DESTINO 4	8352	9661			
PLANTA 1	DESTINO 5	3037	3513			
PLANTA 1	DESTINO	9111	10540			

1	6					
PLANTA 1	DESTINO 7	3796	4392			
PLANTA 1	DESTINO 8	9871	11418			
PLANTA 1	DESTINO 9	45557	52699			
PLANTA 1	DESTINO 10	7593	8783			
PLANTA 1	DESTINO 11	4556	5270			
PLANTA 1	DESTINO 12	6834	7905			
PLANTA 1	DESTINO 13	5315	6148			
PLANTA 1	DESTINO 14	10630	12296			
PLANTA 1	DESTINO 15	16704	19323			
PLANTA 1	DESTINO 16	12908	14931			
PLANTA 1	DESTINO 17	11389	13175			
PLANTA 1	DESTINO 18	6074	7026			
PLANTA 1	DESTINO 19	17463	20201			
PLANTA 1	DESTINO 20	25816	29863			
PLANTA 2	DESTINO 1			22663	10279	17050
PLANTA 2	DESTINO 2			19426	8811	14614
PLANTA 2	DESTINO 3			14569	6608	10961
PLANTA 2	DESTINO 4			8903	4038	6698
PLANTA 2	DESTINO 5			3238	1468	2436
PLANTA 2	DESTINO 6			9713	4405	7307
PLANTA 2	DESTINO 7			4047	1836	3045
PLANTA 2	DESTINO 8			10522	4772	7916
PLANTA 2	DESTINO 9			48564	22027	36536
PLANTA 2	DESTINO 10			8094	3671	6089
PLANTA 2	DESTINO 11			4856	2203	3654
PLANTA 2	DESTINO 12			7285	3304	5480
PLANTA 2	DESTINO 13			5666	2570	4263
PLANTA 2	DESTINO 14			11332	5140	8525
PLANTA 2	DESTINO 15			17807	8076	13396
PLANTA 2	DESTINO 16			13760	6241	10352
PLANTA 2	DESTINO 17			12141	5507	9134
PLANTA 2	DESTINO 18			6475	2937	4871
PLANTA 2	DESTINO 19			18616	8444	14005
PLANTA 2	DESTINO 20			27520	12482	20704
TOTAL		258156	298626	275197	124819	207036

PASO 3. Chequear la condición terminada. Si $Y_{ijt}^{t+1} = Y_{ijt}^t$ y $X_{ijk}^{t+1} = X_{ijt}^t$ entonces termina el proceso. Por lo tanto, los óptimos están dados en las tablas XXXI y XXXII.

Tabla XXIX. X_{ijk} - CANTIDAD ORDENADA

		PRO D 1	PROD 2	PRO D 3	PRO D 4	PRO D 5
PLANTA 1	DESTINO 1	6446	6936			
PLANTA 1	DESTINO 2	5691	6157			
PLANTA 1	DESTINO 3	4968	5370			
PLANTA 1	DESTINO 4	3757	4078			
PLANTA 1	DESTINO 5	2204	2403			
PLANTA 1	DESTINO 6	3956	4290			
PLANTA 1	DESTINO 7	2576	2790			
PLANTA 1	DESTINO 8	4258	4598			
PLANTA 1	DESTINO 9	9470	10185			
PLANTA 1	DESTINO 10	3683	3984			
PLANTA 1	DESTINO 11	2940	3168			
PLANTA 1	DESTINO 12	3573	3853			
PLANTA 1	DESTINO 13	3093	3343			
PLANTA 1	DESTINO 14	4501	4850			
PLANTA 1	DESTINO 15	5257	5716			
PLANTA 1	DESTINO 16	4776	5169			
PLANTA 1	DESTINO 17	4680	5040			
PLANTA 1	DESTINO 18	3371	3635			
PLANTA 1	DESTINO 19	5846	6290			
PLANTA 1	DESTINO 20	7009	7552			
PLANTA 2	DESTINO 1			6752	4540	5841
PLANTA 2	DESTINO 2			6015	4069	5255
PLANTA 2	DESTINO 3			5243	3543	4572
PLANTA 2	DESTINO 4			3992	2710	3507
PLANTA 2	DESTINO 5			2357	1606	2084
PLANTA 2	DESTINO 6			4196	2845	3680
PLANTA 2	DESTINO 7			2727	1847	2387
PLANTA 2	DESTINO 8			4486	3028	3905
PLANTA 2	DESTINO 9			9914	6663	8570
PLANTA 2	DESTINO 10			3891	2631	3397
PLANTA 2	DESTINO 11			3088	2080	2679
PLANTA 2	DESTINO 12			3758	2534	3265
PLANTA 2	DESTINO 13			3265	2207	2849
PLANTA 2	DESTINO 14			4726	3182	4098
PLANTA 2	DESTINO 15			5600	3807	4932
PLANTA 2	DESTINO 16			5051	3418	4416
PLANTA 2	DESTINO 17			4910	3305	4254
PLANTA 2	DESTINO 18			3545	2390	3080
PLANTA 2	DESTINO 19			6124	4117	5297
PLANTA 2	DESTINO 20			7360	4957	6384

Tabla XXX. VALORES B_{ijk}

		PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1	DESTINO 1	3149	3154			
PLANTA 1	DESTINO 2	5291	5297			

PLANTA 1	DESTINO 3	4949	4956			
PLANTA 1	DESTINO 4	2078	2088			
PLANTA 1	DESTINO 5	6572	6589			
PLANTA 1	DESTINO 6	3524	3534			
PLANTA 1	DESTINO 7	3578	3592			
PLANTA 1	DESTINO 8	3579	3587			
PLANTA 1	DESTINO 9	509	513			
PLANTA 1	DESTINO 10	1829	1838			
PLANTA 1	DESTINO 11	4799	4810			
PLANTA 1	DESTINO 12	1452	1461			
PLANTA 1	DESTINO 13	4536	4548			
PLANTA 1	DESTINO 14	3501	3508			
PLANTA 1	DESTINO 15	1815	1822			
PLANTA 1	DESTINO 16	1893	1901			
PLANTA 1	DESTINO 17	2459	2466			
PLANTA 1	DESTINO 18	3917	3926			
PLANTA 1	DESTINO 19	1468	1473			
PLANTA 1	DESTINO 20	2607	2612			
PLANTA 2	DESTINO 1			2595	2698	2667
PLANTA 2	DESTINO 2			5290	5394	5366
PLANTA 2	DESTINO 3			5296	5417	5384
PLANTA 2	DESTINO 4			1764	1912	1874
PLANTA 2	DESTINO 5			5747	5986	5928
PLANTA 2	DESTINO 6			817	961	924
PLANTA 2	DESTINO 7			4901	5127	5067
PLANTA 2	DESTINO 8			3172	3316	3276
PLANTA 2	DESTINO 9			2595	2666	2645
PLANTA 2	DESTINO 10			2496	2658	2614
PLANTA 2	DESTINO 11			5423	5640	5578
PLANTA 2	DESTINO 12			3398	3573	3524
PLANTA 2	DESTINO 13			2647	2841	2788
PLANTA 2	DESTINO 14			5282	5425	5384
PLANTA 2	DESTINO 15			1246	1350	1324
PLANTA 2	DESTINO 16			1421	1544	1511
PLANTA 2	DESTINO 17			4237	4376	4335
PLANTA 2	DESTINO 18			3478	3664	3612
PLANTA 2	DESTINO 19			1831	1945	1911
PLANTA 2	DESTINO 20			335	426	400

Tabla XXXI. Y_{ijk} UNIDADES A TRANSPORTAR OPTIMA

		PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1	DESTINO 1	21260	24593			
PLANTA 1	DESTINO 2	18223	21079			
PLANTA 1	DESTINO 3	13667	15810			
PLANTA 1	DESTINO 4	8352	9661			
PLANTA 1	DESTINO 5	3037	3513			
PLANTA 1	DESTINO 6	9111	10540			
PLANTA 1	DESTINO 7	3796	4392			
PLANTA 1	DESTINO 8	9871	11418			
PLANTA 1	DESTINO 9	45557	52699			
PLANTA 1	DESTINO 10	7593	8783			
PLANTA 1	DESTINO 11	4556	5270			
PLANTA 1	DESTINO 12	6834	7905			
PLANTA 1	DESTINO 13	5315	6148			
PLANTA 1	DESTINO 14	10630	12296			
PLANTA 1	DESTINO 15	16704	19323			
PLANTA 1	DESTINO 16	12908	14931			
PLANTA 1	DESTINO 17	11389	13175			
PLANTA 1	DESTINO 18	6074	7026			
PLANTA 1	DESTINO 19	17463	20201			
PLANTA 1	DESTINO 20	25816	29863			
PLANTA 2	DESTINO 1			22663	10279	17050
PLANTA 2	DESTINO 2			19426	8811	14614
PLANTA 2	DESTINO 3			14569	6608	10961
PLANTA 2	DESTINO 4			8903	4038	6698
PLANTA 2	DESTINO 5			3238	1468	2436
PLANTA 2	DESTINO 6			9713	4405	7307
PLANTA 2	DESTINO 7			4047	1836	3045
PLANTA 2	DESTINO 8			10522	4772	7916
PLANTA 2	DESTINO 9			48564	22027	36536
PLANTA 2	DESTINO 10			8094	3671	6089
PLANTA 2	DESTINO 11			4856	2203	3654
PLANTA 2	DESTINO 12			7285	3304	5480
PLANTA 2	DESTINO 13			5666	2570	4263
PLANTA 2	DESTINO 14			11332	5140	8525
PLANTA 2	DESTINO 15			17807	8076	13396
PLANTA 2	DESTINO 16			13760	6241	10352
PLANTA 2	DESTINO 17			12141	5507	9134
PLANTA 2	DESTINO 18			6475	2937	4871
PLANTA 2	DESTINO 19			18616	8444	14005
PLANTA 2	DESTINO 20			27520	12482	20704
TOTAL		258156	298626	275197	124819	207036

Tabla XXXII. X_{ijk} -CANTIDAD ORDENADA OPTIMA

		PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
PLANTA 1	DESTINO 1	6446	6936			
PLANTA 1	DESTINO 2	5691	6157			
PLANTA 1	DESTINO 3	4968	5370			
PLANTA 1	DESTINO 4	3757	4078			
PLANTA 1	DESTINO 5	2204	2403			
PLANTA 1	DESTINO 6	3956	4290			
PLANTA 1	DESTINO 7	2576	2790			
PLANTA 1	DESTINO 8	4258	4598			
PLANTA 1	DESTINO 9	9470	10185			
PLANTA 1	DESTINO 10	3683	3984			
PLANTA 1	DESTINO 11	2940	3168			
PLANTA 1	DESTINO 12	3573	3853			
PLANTA 1	DESTINO 13	3093	3343			
PLANTA 1	DESTINO 14	4501	4850			
PLANTA 1	DESTINO 15	5257	5716			
PLANTA 1	DESTINO 16	4776	5169			
PLANTA 1	DESTINO 17	4680	5040			
PLANTA 1	DESTINO 18	3371	3635			
PLANTA 1	DESTINO 19	5846	6290			
PLANTA 1	DESTINO 20	7009	7552			
PLANTA 2	DESTINO 1			6752	4540	5841
PLANTA 2	DESTINO 2			6015	4069	5255
PLANTA 2	DESTINO 3			5243	3543	4572
PLANTA 2	DESTINO 4			3992	2710	3507
PLANTA 2	DESTINO 5			2357	1606	2084
PLANTA 2	DESTINO 6			4196	2845	3680
PLANTA 2	DESTINO 7			2727	1847	2387
PLANTA 2	DESTINO 8			4486	3028	3905
PLANTA 2	DESTINO 9			9914	6663	8570
PLANTA 2	DESTINO 10			3891	2631	3397
PLANTA 2	DESTINO 11			3088	2080	2679
PLANTA 2	DESTINO 12			3758	2534	3265
PLANTA 2	DESTINO 13			3265	2207	2849
PLANTA 2	DESTINO 14			4726	3182	4098
PLANTA 2	DESTINO 15			5600	3807	4932
PLANTA 2	DESTINO 16			5051	3418	4416
PLANTA 2	DESTINO 17			4910	3305	4254
PLANTA 2	DESTINO 18			3545	2390	3080
PLANTA 2	DESTINO 19			6124	4117	5297
PLANTA 2	DESTINO 20			7360	4957	6384

VI. CONCLUSIONES

Es de resaltar en cuanto a la formulación y aplicación del modelo matemático como este determina los tamaños de lotes de producción de las diferentes plantas, la cantidad ordenada desde los diferentes destinos (distribuidores) a las plantas de producción, la producción anual asignada de las plantas y las unidades a transportar desde las diferentes plantas a los diferentes distribuidores a un costo mínimo total de operación de la cadena de suministro.

Cabe anotar, que el modelo solamente se aplicó desde las plantas a los distribuidores y no abarca desde los distribuidores a los detallistas, por cuanto la información de los detallistas (más de 10000 aproximadamente) no se suministró por la empresa consultada. No obstante, el modelo esta desarrollado para ser implementado hasta los detallistas.

La presente investigación evidencia que a través de los métodos de optimización y mediante estrategias que integran la toma de decisiones en la red logística se mejora el desempeño y eficiencia de la cadena de suministro.

En cuanto a la aplicación del modelo matemático en la empresa Llantera y de acuerdo con los resultados obtenidos, podemos concluir lo siguiente:

- La producción de llantas para auto y camioneta se debe realizar en la planta 1. La producción de llantas para buseta y camión (pequeño y grande) se deben realizar en la planta 2.
- Estos resultados corroboran las políticas de las compañías llanteras multinacionales en cuanto a especializar la fabricación de las llantas de acuerdo con su tamaño, costos de manufactura, costos de inventario, costos de alistamiento, costos de ordenar y costos de envío. En particular, las industrias llanteras especializan sus plantas de producción en el mundo, por líneas de productos y es así como existen plantas de producción especializadas en la fabricación de llantas para auto y camioneta, camión, minería y agrícola. Estas decisiones de especializar las plantas de producción en familias de productos, obedece principalmente a la reducción de costos en la cadena de suministro.

REFERENCIAS

- [1] K. Govindan, V. Agarwal, J. D. Darbari, and P. C. Jha, "An integrated decision-making model for the selection of sustainable forward and reverse logistic providers," *Ann. Oper. Res.*, vol. 273, no. 1–2, doi: 10.1007/s10479-017-2654-5. 2019.
- [2] D. Tuljak-Suban and P. Bajec, "Integration of AHP and GTMA to make a reliable decision in complex decision-making problems: Application of the logistics provider selection problem as a case study," *Symmetry (Basel)*, vol. 12, no. 5, doi: 10.3390/SYM12050766. 2020.
- [3] A. Melkonyan, T. Gruchmann, F. Lohmar, V. Kamath, and S. Spinler, "Sustainability assessment of last-mile logistics and distribution strategies: The case of local food networks," *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 228, doi: 10.1016/j.ijpe.2020.107746. 2020.
- [4] S. Meutia, K. Anshar, and Subhan, "Determining Supply Chain Network Using Location, Inventory, Routing Problem (LIRP) Approaches," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1933, no. 1, doi: 10.1088/1742-6596/1933/1/012119.
- [5] R. Pietroní, "Cooperation platform for distributed manufacturing," *Decis. Mak. Manuf. Serv.*, vol. 14, no. 2, doi: 10.7494/dmms.2020.14.2.3650. 2021.
- [6] S. Gupta, S. Chaudhary, P. Chatterjee, and M. Yazdani, "An efficient stochastic programming approach for solving integrated multi-objective transportation and inventory management problem using goodness of fit," *Kybernetes*, doi: 10.1108/K-08-2020-0495. 2021.
- [7] Z. Y. Liu and P. T. Guo, "Supply Chain Decision Model Based on Blockchain: A Case Study of Fresh Food E-Commerce Supply Chain Performance Improvement," *Discret. Dyn. Nat. Soc.*, vol. 2021, doi: 10.1155/2021/5795547. 2021.
- [8] M. Golestani, S. H. Moosavirad, Y. Asadi, and S. Biglari, "A Multi-Objective Green Hub Location Problem with Multi Item-Multi Temperature Joint Distribution for Perishable Products in Cold Supply Chain," *Sustain. Prod. Consum.*, vol. 27, doi: 10.1016/j.spc.2021.02.026. 2021.
- [9] R. Agrawal, V. A. Wankhede, A. Kumar, S. Luthra, and D. Huisingh, "Progress and trends in integrating Industry 4.0 within Circular Economy: A comprehensive literature review and future research propositions," *Bus. Strateg. Environ.*, doi: 10.1002/bse.2910. 2021.
- [10] L. Huang, Y. Tan, and X. Guan, "Evaluation of Cruise Ship Supply Logistics Service Providers with ANP-RBF," *J. Adv. Transp.*, vol. 2021, doi: 10.1155/2021/6645946. 2021.

- [11] B. V. R. Furlanetto, F. A. S. Marins, A. F. da Silva, and C. M. Defalque, "Optimization of a logistics network considering allocation of facilities and taxation aspects," *Gest. e Prod.*, vol. 27, no. 4, doi: 10.1590/0104-530X4918-20. 2021.
- [12] T. Liang and H. Wang, "Consumer decision-making and smart logistics planning based on FPGA and convolutional neural network," *Microprocess. Microsyst.*, vol. 80, doi: 10.1016/j.micpro.2020.103628. 2021.
- [13] G. Li, "Development of cold chain logistics transportation system based on 5G network and Internet of things system," *Microprocess. Microsyst.*, vol. 80, doi: 10.1016/j.micpro.2020.103565. 2021.
- [14] R. Aldrighetti, D. Battini, D. Ivanov, and I. Zennaro, "Costs of resilience and disruptions in supply chain network design models: A review and future research directions," *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 235, doi: 10.1016/j.ijpe.2021.108103. 2021.
- [15] A. M. Jalal, E. A. V. Toso, and R. Morabito, "Integrated approaches for logistics network planning: a systematic literature review," *International Journal of Production Research*, doi: 10.1080/00207543.2021.1963875. 2021.
- [16] S. Belieres, M. Hewitt, N. Jozefowicz, and F. Semet, "A time-expanded network reduction matheuristic for the logistics service network design problem," *Transp. Res. Part E Logist. Transp. Rev.*, vol. 147, doi: 10.1016/j.tre.2020.102203. 2021.
- [17] Y. Cheng and X. Pan, "Design of a Support System for Complicated Logistics Location Integrating Big Data," *Adv. Civ. Eng.*, vol. 2021, 2021, doi: 10.1155/2021/6697755. 2021.

