VENTAJA DE UN COHETE MULTIETAPA PARA EL ENVÍO DE CARGA A DIFERENTES ORBITAS TERRESTRES

Advantage of a multi-stage rocket for freight shipping to different earth orbits

DANIEL JESÚS MARTÍNEZ CALDERÓN[1]

Recibido:09 de junio de 2017. Aceptado:23 de junio de 2017

DOI:http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n8.a27

Resumen

La actividad de enviar carga al espacio es muy costosa debido a factores como la energía involucrada, la cantidad de propelente necesario, la velocidad, altitud y empuje requeridos. Por lo tanto se analiza la ventaja en el cambio de velocidad que genera un cohete de 2 etapas usando la ecuación básica de la cohetería, la energía mecánica involucrada en una órbita y la relación entre el periodo y la velocidad circular. Finalmente se muestra la importancia de la relación empuje-peso en la cohetería y su relación con el vuelo.

Palabras clave: ecuación cohete ideal, exceso de empuje, impulso especifico, periodo orbital, relación de masas, velocidad circular.

Abstract

The activity of sending cargo to space is very expensive due to factors such as the energy involved, the amount of propellant needed, speed, altitude and thrust. Therefore, the advantage in the change of speed generated by a 2-stage rocket is analyzed using the ideal rocket equation, the mechanical energy involved in an orbit and the relationship between the period and the circular velocity. Finally, the importance of the thrust-to- weight ratio in rocketry and its relation to the flight.

Keywords:ideal rocket equation, excess thrust, specific impulse, orbital period, mass ratio, circular velocity.

I. Nomenclatura

T : Thrust o Empuje
ΔV : Cambio de velocidad total del cohete.
m_p : Masa del propelente.
m_{est} : Masa de la estructura.
m_{carga} : Masa de la carga.
E.P. : Energía Potencial.
E.C. : Energía Cinética.
g_o : aceleración de la gravedad a nivel del mar.
$T_{exc.}$: Exceso de Empuje.
Q : Presión Dinámica
a_{des} : Aceleración al despegue.
V : velocidad circular
V_{ex} : Velocidad de salida de los gases de escape productos de la combustión del propelente por la tobera.

[1] Estudiante Ingeniería Aeronáutica Fundación Universitaria Los Libertadores (Proceso de grado). Estudios Virtuales: Calculus 1A: Differentiation (MITx), Calculus 1B: Intergation (MITx), Mechanics: Kinematics and Dynamics (MITx), Introduction to Aerospace Engineering: Astronautics and Human Spaceflight (MITx), Introduction to Aeronautical Engineering (Delft University of technology), Introduction to Differential Equations (Boston University), Nonlinear Differential Equations: Order and Chaos (Boston University), GeometryX: Introduction to Geometry (School Yourselft). Correo Electrónico: dj25martinezc@gmail.com

II. Introducción

Los cohetes, esas máquinas asombrosas capaces de llevarnos a las puertas del cosmos ya sea físicamente o mediante herramientas de medición como telescopios y sondas así como sirven enviando los racimos de satélites tan necesarios en este siglo de las ciencias de la información y las redes, evolucionan constantemente en diseño y manufactura debido fundamentalmente al elevado costo energético y monetario que implica poner una masa x a una altura orbital. Por ello, una de las grandes y primeras mejoras fue el darse cuenta de la ventaja que brinda un cohete que separara parte de la masa inicial durante parte de la trayectoria, aumentando así el famoso y deseado ΔV tan necesario para alcanzar la velocidad orbital que no debe ser menor a 8km por segundo.

En un cohete de una sola etapa el porcentaje de masa del propelente para entrar en órbita es tan grande que vuelve inviable enviar siquiera el cohete sin carga y limita la calidad estructural de la máquina pues su masa tiene que ser mínima.

III. ¿Cuanta energía se requiere para poner un kilogramo en una orbita de leo?

LEO son las siglas para Low Earth Orbit u órbita baja de la la tierra que es una altitud que comprende desde los 180 km hasta los 2000 km [1] sobre el nivel del mar. Es así como por ejemplo la ISS (Estación Espacial Internacional) orbita entre los 330 y 435 km de altitud.

Supongamos entonces que queremos saber el costo de poner un kilogramo en la ISS que se encuentra a 420 km, en primer lugar acudimos a la ecuación de la energía potencial así:

$$\text{E.P.} = m * g * h \qquad (1)$$

Donde g es la aceleración gravitatoria a nivel del mar, y h es la altitud.

$$\text{E.P.} = (1\text{kg}) * (9.8\frac{m}{s^2}) * (420{,}000\text{m}) \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se deduce que la energía potencial de 1 kg a esa altitud es de aproximadamente $4.11*10^6$ Jules o 4.11 Mega joules. De igual manera la masa necesita una velocidad mínima para mantenerse a esa altitud y no desacelerar hasta tal punto que por la fuerza gravitatoria de la tierra empiece a caer de nuevo, ésta velocidad es del orden de 8 kms y está relacionada con la energía cinética así:

$$\text{E.C.} = \frac{1}{2} * m * V^2 \qquad (3)$$

$$\text{E.C.} = \frac{1}{2} * (1\ kg) * (8 * 10^3\ \frac{m}{s})^2 \qquad (4)$$

De la ecuación (4) resulta que la energía cinética de 1 kg es de $32*10^6$ Jules o 32 Mega joules.

Por lo tanto la energía mecánica total de 1 kilogramo, definida como la suma de la energía potencial mas la cinética nos da un estimado de **36.11*10^6 o 36 Mega joules**.

Por lo que 36 Mega joules es igual a $3.6*10^7$ Watt*segundo que es equivalente a 10 Kilowatts* hora.

Recordando que Watt es la relación $1\frac{\text{Joule}}{segundo}$, y que un Watt- hora (Wh) es la energía necesaria para mantener una potencia constante de un Watt (1 W) durante una hora. Sabiendo que en Colombia el costo de 1 Kw*h es en promedio 400 pesos [2], poner un kilogramo a 420 km de altitud tendría un costo aproximado de 4.000 pesos, si de energía eléctrica habláramos.

Al sumar el costo energético a los demás costos asociados al lanzamiento, facilmente el precio total llega al orden de entre **30 a 60 millones de pesos (10.000 a 20.000 dolares) por kilogramo** [3], lo cual nos lleva un analisis profundo de toda la masa que compone la máquina, y la ecuación del cohete ideal aparece en escena.

IV. Ecuación del cohete ideal

Fue desarrollada por el científico Ruso Konstantin Tsiolkovsky y usa el principio de la conservación del momentum aplicado a un volumen de control que vendría siendo el motor del cohete y lo relaciona con el máximo cambio de velocidad del cohete (ΔV), con la velocidad máxima de los gases de escape por la tobera ( ) y las masas inicial y final del cohete. Es ideal pues se asume que el cohete está en el espacio o fuera del alcance de una fuerza gravitacional de consideración y la única fuerza sobre el cohete es el empuje.

Esta ecuación es una de las relaciones más fundamentales en toda la astronáutica y tiene implicaciones significativas para los vuelos espaciales.

Bajo las condiciones antes dadas la única fuerza sobre el cohete es el empuje, definido como:

$$T= -\dot{m} * V_{ex} \quad (5)$$

Donde $\dot{m}$ es el flujo másico o la cantidad de propelente consumido por segundo, el signo negativo es por el empuje, contrario a la salida de los gases de escape.

$$T= -\frac{dm}{dt} * V_{ex} \quad (6)$$

Aplicando la segunda ley de Newton que indica que la sumatoria de fuerzas (F) sobre el cohete es igual a la masa del mismo por la aceleración que lleva

$$F=m*a \quad (7)$$

Al igualar (6) y (7) obtenemos:

$$-\frac{dm}{dt} * V_{ex} = m*\frac{dV}{dt} \quad (8)$$

Al despejar dV tenemos:

$$dV = -V_{ex} * \frac{dm}{m} \quad (9)$$

Ahora integramos a ambos lados, a la izquierda respecto a la velocidad y a la derecha respecto a la masa:

$$\int_{V_i}^{V_f} dV = -\int_{m_i}^{m_f} V_{ex} * \frac{dm}{m},$$

Ya que la velocidad de salida de los gases es constante, desarrollando las integrales resulta la relación:

$$\Delta V= V_{ex}*\ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \quad (10)$$

De (10) vemos los términos m_i, y m_f, donde la masa inicial:

$$m_i= m_{es.}+m_{p.}+ m_{carga} , \quad (11)$$

y la masa final m_f será:

$$m_f = m_{es.} + m_{carga} \quad (12)$$

$$m_f = m_i - m_p$$

Por ende,

$$m_p = m_i - m_{f.} \quad (13)$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados de la ecuación (10) obtenemos la nueva relación:

$$\frac{m_i}{m_f} = e^{\frac{\Delta V}{V_{ex}}} \quad (14)$$

Todo nos va llevando a la fracción de propelente $\frac{m_p}{m_i}$ que nos indica que porcentaje de la masa total del cohete debe ser propelente para lograr la velocidad necesaria para llegar al punto dado.

De la ecuación (14) despejamos m_f y el valor obtenido lo reemplazamos en (13) lo que nos genera la relación que buscábamos:

$$\frac{m_p}{m_i} = 1- e^{-\frac{\Delta V}{V_{ex}}} \quad (15)$$

De (15) podemos deducir que la velocidad de salida de los gases V_{ex} es crítica en el desempeño del cohete y para los de combustible líquido está en el rango de ente los 2.000 y 4.500 m/s [4]. La velocidad requerida por el cohete para entrar a LEO es de aproximadamente 9000 m/s.

Tomando como ejemplo un cohete cuya V_{ex} sea de 4000 m/s apelando a la ecuación (15) hallamos que porcentaje de la masa total debe ser propelente para llegar a la órbita así:

$$\frac{m_p}{m_i} = 1- e^{-\frac{9000}{4000}}$$

Dando como resultado que **el 89% de la masa debería ser propelente y el 11% restante queda para la estructura y carga lo cual deja extremadamente poco margen para diseñar la máquina**. Aumentando V_{ex} dicha relación mejora dando mayor gabela para la masa de la estructura y carga del cohete, pero a simple vista se ve que se necesita hacer algo mejor.

V. Cohete Multietapa

De la ecuación del cohete ideal se puede ver que se requiere un gran cambio en la velocidad (ΔV) para alcanzar la órbita y para ello gran parte de la masa del mismo debe ser propelente, tanto que no es realista concebir un cohete de una sola etapa que deje menos del 15% del total de la masa para carga y la estructura.

En un cohete de varias etapas, una vez que se consume el propelente en la primera etapa, la estructura de la primera etapa se descarta, y el cohete continúa avanzando con el propelente de la segunda etapa y así según el número de etapas que tenga. Este procedimiento nos da un aumento significativo en el deseado cambio de velocidad (ΔV).

En la actualidad no se usan cohetes con más de 2 etapas para las misiones como los Falcon 9 de spacex [5] debido a que aumenta la probabilidad de falla en la separación y la probabilidad de fallos en el encendido de los motores de las distintas etapas. Fig. 1.

Para ver claramente la ganancia en ΔV, se comparan 2 cohetes que salen de la plataforma de lanzamiento con la misma masa inicial, uno con una sola etapa y el otro con 2 etapas.

A. ΔV Obtenido en un Cohete de una Etapa

Consideremos un cohete cuyo Impulso Especifico (Isp) es de 450 s, cuya masa inicial es de 115

Fig. 1. Separación de la primera etapa del cohete Apolo 11 quien llegaría hasta la luna. (fuente: NASA)

Toneladas repartidas así: Una carga de 5 toneladas, una masa estructural (incluidos los motores) de 10 toneladas y 100 toneladas de combustible. ¿Cuánto ΔV puede obtenerse si se quema todo el combustible en una sola etapa?

Primero necesitamos la V_{ex} definida como:

$$V_{ex} = Isp * g_o \qquad (16)$$

Reemplazando,

V_{ex} = *450s* *9.8 m/s = 4410 m/s. Que es una velocidad muy alta muestra que es un cohete de los más potentes.

Ya con la velocidad de escape de los gases de combustión, acudimos a las ecuaciones (11), (12) y (10) para hallar ΔV:

$$m_i = m_{es.} + m_{p.} + m_{carga}$$

$$\begin{aligned} m_i &= 10\text{ Ton}+100\text{ Ton}+5\text{ Ton.} \\ m_f &= m_{es.} + m_{carga} \\ m_f &= 10\text{Ton} + 5\text{Ton} \\ \Delta V &= 4410\text{ m/s}*\ln\left(\frac{115}{15}\right) \end{aligned} \qquad (17)$$

El ΔV para este cohete que nos da la ecuación (17) con las condiciones iniciales es de aproximadamente **ΔV= 8983m/s.**

B. ΔV Obtenido en un Cohete de 2 Etapas

Supongamos que un cohete con la misma masa a la del ejemplo A, lo dividimos en 2 etapas iguales quiere decir que cada etapa tiene la mitad del propelente original y la masa de la estructura original, se divide en dos, siendo la misma para ambas etapas.

Primero hallamos el ΔV_1 de la primera etapa teniendo mucho cuidado con la división en las masas del cohete.

$$\boldsymbol{\Delta V_1} = \quad V_{ex}*\ln\left(\frac{m_{i1}}{m_{f1}}\right), \qquad (18)$$

Dónde:

$$m_{i1} = m_{es.1} + m_{p1.} + m_{es.2} + m_{p2.} + m_{carga},$$
$$m_{i1} = (5\text{Ton}) + (50\text{Ton}) + (5\text{Ton}) + (50\text{Ton}) + (5\text{Ton}) = 115\text{ Ton}$$

La masa final 1 será la inicial 1 menos la masa del propelente 1

m_{f1}= (5Ton)+ (5Ton)+ (50Ton)+ (5Ton) = 65,000 kg o 65 Toneladas.

Con las masas halladas, reemplazamos en (18) y se obtiene un ΔV_1 de aproximadamente 2,516 m/s.

Ahora hallamos el ΔV_2 de la segunda etapa teniendo en cuenta el manejo de las masas del cohete en este periodo.

$$m_{i2} = m_{es.2} + m_{p2.} + m_{carga}, \qquad m_{i2} = 5000\text{ kg} + 50000\text{ kg} + 5000\text{kg} \tag{19}$$

Dando un total de m_{i2} 60000 kg o 60 toneladas. Nótese que en la masa inicial 2 ya se liberó la masa estructural de la primera etapa y se consumió el propelente de esta.

Siguiendo el procedimiento vemos que la masa final de la etapa 2 m_{f2} será:

$$m_{f2} = m_{es.2} + m_{carga}, \qquad m_{f2} = 5\text{ Ton}+5\text{ Ton}= 10\text{ Ton}. \tag{20}$$

Con las masas iniciales y final de éste periodo de vuelo, el cambio en la velocidad de esta segunda etapa será de:

$$\boldsymbol{\Delta V_2} = V_{ex} * \ln\left(\frac{m_{i2}}{m_{f2}}\right), \tag{21}$$

Dándonos un ΔV_T **de 7910 m/s**, El último paso es hallar el cambio de velocidad total Δ sumando los resultados obtenidos:

$$\Delta V_T = \Delta V_1 + \Delta V_2, \qquad \Delta V_T = 2516\text{ m/s} + 7910\text{ m/s}= 10426\text{ m/s}. \tag{22}$$

Combinando (18) y (21) obtenemos la siguiente relación compacta para hallar el cambio de velocidad total:

$$\Delta V_T = V_{ex} * \ln\left(\frac{m_{i2} * m_{i1}}{m_{f2} m_{f1}}\right), \tag{23}$$

Es así como vemos que en dos cohetes con la misma masa inicial pero uno con dos etapas y el otro solo con una, los cambios de velocidad entre ambos es considerable siendo en el de una etapa de **ΔV de 8983m/s; mientras que el de dos etapas logra un ΔV_T de 10426 m/s. Por lo que ésta técnica genera un aumento del cambio de velocidad de 1443 m/s evidenciando la ventaja para mandar carga a mayores altitudes de una forma más eficiente.**

VI. Efectos de la gravedad y la resistencia atmosfèrica durante el lanzamiento

La ecuación del cohete ideal se derivó tomando como referencia un lanzamiento desde el espacio, sin embargo, los cohetes salen desde plataformas aquí en la tierra la cual tiene una atmosfera y un campo gravitacional que se debe atravesar, durante el proceso la nave entra a una velocidad supersónica con las correspondientes ondas de choque hasta llegar al punto de Max Q [6], donde la integridad de la estructura general es más vulnerable.

Al despegar de una superficie planetaria, no solo la velocidad de salida de los gases V_{ex} es importante, el equilibrio entre el empuje y el peso es enormemente relevante, el termino **exceso de empuje al despegue** definido como el empuje máximo menos el peso inicial debe ser un número positivo. Por ejemplo, el Saturno V famoso por sus misiones a la luna, cuyo peso al despegue era de 6.4 millones de libras tenía un empuje total con sus 5 motores F1 de 7.5 millones de libras. Lo que nos da un exceso de empuje $T_{exc.}$

T_{exc} = *Empuje Total - Peso al despege*

T_{exc} = 7.5 - 6.4 = 1.1 millones de libras es el exceso de empuje, con este dato podemos hallar la aceleración inicial al despegue así:

$a_{des.} = \frac{T_{exc.}}{Peso\ inicial} = \frac{1.1}{6.4} = 0.17\text{g}$ por lo que al despegar se podía apreciar la poca velocidad que tomaba durante sus primeros segundos de vuelo. Algunos cohetes tienen una relación empuje peso de hasta 180.

VII. ¿Que significa entrar en la orbita terrestre?

Una órbita es la trayectoria repetitiva que describe un objeto en el espacio a causa de la fuerza gravitatoria combinada de los cuerpos [7], las principales son las elípticas como las del sistema solar o las circulares como las que tienen los satélites alrededor de la tierra. Para hablar de órbitas terrestres necesitamos la relacion entre la gravedad, las masas de los cuerpos y la distancia entre ellos, para eso usamos la teoría gravitacional de Newton.

$$F_{grav} = \frac{G * M_1 * m_2}{R^2} \tag{24}$$

Donde G es la constante gravitacional, M_1 es la masa de la tierra, m_2 la masa del cuerpo que orbita y R la distacia entre el centro de la tierra hasta el centro del objeto orbitante.

Para hallar la aceleración y velocidad del cuerpo que orbita procedemos a reorganizar (24):

$$\frac{F_{grav}}{m_2} = \frac{G * M_1}{R^2} \text{ pero la aceleración es centrípeta por lo cual}$$

$$\frac{F_{grav}}{m_2} = \frac{V^2}{R} \tag{25}$$

Donde V^2 es la velocidad circular al cuadrado. Al reemplazar (25) en (24) obtenemos la velocidad circular que buscábamos:

$$V^2 = \frac{G * M_1}{R} \tag{26}$$

La ecuación (26) meuestra que la velocidad circular depende de la masa terrestre y la distancia entre los cuerpos, es decir que 2 objetos con masas distintas pero a la misma distancia de la tierra, tendrán la misma velocidad circular.

Finalmente con la velocidad circular podemos hallar el periodo orbital P definido como:

$$P = \frac{2\pi * R}{V} \ o \ P^2 = \frac{4 * \pi^2 * R^3}{G * M_1} \tag{27}$$

El período orbital para LEO es de 90 minutos, para GEO (Orbita Geoestacionaria) es de 24 horas muy usada por compañías de television satelital.

VIII. Conclusiones

Entrar en órbita quiere decir que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza gravitacional por lo que está en la llamada caída libre eterna alrededor del cuerpo masivo.

Enviar carga a distintas orbitas tiene grandes costos, un solo kilogramo de masa tiene una energía mecánica de aproximadamente 36 Mega joules a una altura de 400km y a 8km/s; así mismo la cantidad de propelente necesario para lograr estos numeros es bastante alta. Por ello un cohete de 2 etapas que da un aumento significativo de ?V o cambio total de velocidad del cohete, es necesario para llevar carga a la altitud deseada y obtener una ganancia por esa actividad.

Al revisar la ecuación ideal del cohete se aprecia que al incrementar la velocidad de salida de los gases producto de la combustión es decisivo para el desempeño del motor cohete. Entender que el exceso de empuje es vital para superar la densidad de la atmosfera y el campo gravitacional terrestre, siendo el empuje una fuerza importante no solo para acelerar la nave sino también para desacelerar y poder aterrizar o realizar ajustes durante la trayectoria trazada.

IX. Referencias

[1] H. Riebeek, Earth Observatory [online]. Usa: Goddard Space Flight Center, 2009 Disponible en: https://earthobservatory.nasa.gov/Features/OrbitsCatalog/

[2] Codensa, Nuevos Valores del Kilovatio en Colombia [online]. Disponible en: https://www.codensa.com.co/hogar/valor-del-kilovatio-en-colombia-disminuye

[3] J. Hoffman, Introduction to Aerospace Engineering [online]. MIT, 2016. Disponible en: https://courses.edx.org/courses/course-v1:MITx+16.00x+3T2016/course/

[4] Physic Forum, Rocket Engine Exhaust Velocity [online]. Disponible en: https://www.physicsforums.com/threads/rocket-engine-exhaust-velocity.296023/.

[5] SpaceX, Falcon 9 and Dragon to Retrun Astronauts to space, [online]. Disponible en: http://www.spacex.com/falcon9

[6] Wikipedia, Máximum Dynamic Pressure, [online]. Nasa, 2017. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Q

[7] F. Wild, What is an orbit? [online]. Nasa, 2017 Disponible en https://www.nasa.gov/audience/forstudents/5-8/features/nasa-knows/what-is-orbit-58.html